

**Gamblers' Rationality in
Parimutuel Soccer Betting:**
Strategisches Spielverhalten bei
Totalisatorspielen mit nicht-
gleichwahrscheinlichen
Spielausgängen wie Toto und
Torwette

Ursula Hauser, Ulrich König, Elizaveta Krylova

**Gamblers' Rationality in
Parimutuel Soccer Betting:**
Strategisches Spielverhalten bei
Totalisatorspielen mit nicht-
gleichwahrscheinlichen
Spielausgängen wie Toto und
Torwette

Ursula Hauser, Ulrich König, Elizaveta Krylova

October 2000

Contact:

Ursula Hauser
☎: +43/1/599 91-261
email: hauser@ihs.ac.at

Ulrich König
Department of Economics
University of Vienna
☎: +43/1/4277-37435
email: Ulrich.koenig@univie.ac.at

Elizaveta Krylova
☎: +43/1/599 91-151
email: krylova@ihs.ac.at

Founded in 1963 by two prominent Austrians living in exile – the sociologist Paul F. Lazarsfeld and the economist Oskar Morgenstern – with the financial support from the Ford Foundation, the Austrian Federal Ministry of Education and the City of Vienna, the Institute for Advanced Studies (IHS) is the first institution for postgraduate education and research in economics and the social sciences in Austria. The **Economics Series** presents research done at the Department of Economics and Finance and aims to share “work in progress” in a timely way before formal publication. As usual, authors bear full responsibility for the content of their contributions.

Das Institut für Höhere Studien (IHS) wurde im Jahr 1963 von zwei prominenten Exilösterreichern – dem Soziologen Paul F. Lazarsfeld und dem Ökonomen Oskar Morgenstern – mit Hilfe der Ford-Stiftung, des Österreichischen Bundesministeriums für Unterricht und der Stadt Wien gegründet und ist somit die erste nachuniversitäre Lehr- und Forschungsstätte für die Sozial- und Wirtschaftswissenschaften in Österreich. Die **Reihe Ökonomie** bietet Einblick in die Forschungsarbeit der Abteilung für Ökonomie und Finanzwirtschaft und verfolgt das Ziel, abteilungsinterne Diskussionsbeiträge einer breiteren fachinternen Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Die inhaltliche Verantwortung für die veröffentlichten Beiträge liegt bei den Autoren und Autorinnen.

Abstract

A model for strategic behaviour in parimutuel gambles with unequal winning-probabilities is developed and applied to gambles based on soccer results. Assuming that the bookmakers' quotas reflect the true probability of each possible result of a soccer game, we are able to derive a formula for the expected payoff of a betting strategy (Tipp). Using recent (1996-99) data from the Austrian games Toto and Torwette we are able to calculate the optimal strategies for 90 Toto and Torwette rounds. It turns out that given the relatively high probability of a rollover, it is optimal to overbet favourite outcomes (as compared to the probability of their occurrence). Comparing optimal with actual gamblers' behaviour we find that overbetting is even more pronounced than predicted by the model. This means that gamblers bet too frequently on relatively probable results whereas less probable results are too infrequently chosen relatively to the optimal strategy.

Zusammenfassung

Wir entwickeln ein Modell für strategisches Spielverhalten bei Glücksspielen nach dem Totalisatorprinzip und wenden es auf die Fußballwettspiele Toto und Torwette an. Unter der Annahme, dass Buchmacherquoten die „wahren“ Ausgangswahrscheinlichkeiten der betreffenden Fußballspiele reflektieren, können wir die Formel zur Berechnung des erwarteten Payoffs einer Wettstrategie (Tipp) herleiten. Mit den Daten der österreichischen Spiele Toto und Torwette für die Jahre 1996-1999 können wir die optimale Spielstrategie für 90 Toto- bzw. Torwetterunden berechnen. Das wesentliche Ergebnis dieser Untersuchung ist, dass aufgrund der hohen Wahrscheinlichkeit, dass es zu einem Jackpot kommt, die optimale Spielstrategie darin besteht, Favoriten relativ zu ihrer Gewinnwahrscheinlichkeit zu überwetten. Ein Vergleich der optimalen Spielstrategie mit dem empirisch beobachteten Spielerverhalten zeigt, dass die Favoriten sogar noch stärker überwettet werden als dies vom Modell vorhergesagt wird.

Keywords

Decision making under risk and uncertainty, parimutuel betting, sports, gambling

Schlagwörter

Totalisatorwetten, angewandte Spieltheorie, Glücksspiel

JEL Classifications

L83, D12

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Rationales Spielverhalten – ein einfaches Beispiel	2
3	Payoff im Toto	5
4	Optimale Spielstrategie im symmetrischen Gleichgewicht	8
5	Berechnung der Eintrittswahrscheinlichkeiten	9
6	Berechnung und quantitative Analyse optimaler Spielstrategien	11
7	Spezielle Probleme in der Torwette	16
7.1	Ermittlung der Auftrittswahrscheinlichkeiten	17
7.2	Optimale Spielstrategien für die Torwette	19
8	Empirische Strategiewahl von Toto- und TorwettespielerInnen im Vergleich zum theoretischen Modell	21
9	Detailbetrachtungen zur empirischen Strategiewahl – sind systematische Profite erzielbar?	25
9.1	Rundenselektion	25
9.2	Tippsselektion	26
10	Schlussfolgerungen und Diskussion	31
	Literaturverzeichnis	33

1 Einleitung

In diesem Artikel entwickeln wir ein Modell für optimales Spielverhalten bei Sportwetten nach dem Totalisatorprinzip. Sportwetten nach dem Totalisatorprinzip unterscheiden sich von reinen Glücksspielen nach dem Totalisatorprinzip wie z. B. Lotto in zwei Dimensionen. Erstens sind die Gewinnereignisse (Team A gewinnt/verliert gegen Team B) nicht gleich wahrscheinlich. Zweitens sind die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Gewinnereignisse von Runde zu Runde unterschiedlich. Das bedeutet, dass die optimale Spielstrategie jede Runde eine andere ist. Weiters bedeutet dies, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit jedes Gewinnereignisses zuerst bestimmt werden muss. In diesem Artikel untersuchen wir die beiden österreichischen Spiele “Toto” und “Torwette”. Wir leiten die optimale Strategie eines Spielers in einem symmetrischen gemischten Gleichgewicht her. Ein Vergleich mit den empirischen Tippverteilungen in 93 Toto- und eine Reihe von Torwette-Runden zeigt, dass die SpielerInnen nicht die optimale Strategie wählen. Abschließend gehen wir der Frage nach, ob es für einen Spieler möglich ist, durch gezielte Rundenselektion oder Tippselektion systematische Profite zu erzielen. Rundenselektion bedeutet, dass nur in Runden mit hinreichend hohem Payoff aufgrund eines Mehrfachjackpots gespielt wird. Tippselektion bedeutet, dass Tippreihen, die von den SpielerInnen relativ zur optimalen Strategie untergewichtet werden, identifiziert und gezielt getippt werden. Unsere Berechnungen zeigen, dass eine Strategie der Rundenselektion, die sich auf wenige Runden mit hohem Payoff beschränkt, in der Vergangenheit einen positiven Payoff gebracht hätte. Betreffend die Tippselektion, können wir ex-post Tippreihen identifizieren, deren Bruttopayoff über dem Einsatz liegt. Zuletzt werden die Grenzen der Anwendbarkeit solcher Strategien kurz diskutiert.

Das Spieldesign von Toto und Torwette

Bei *Toto* gilt es, die Ausgänge von 12 Fußballspielen richtig vorherzusagen, wobei der Spieler zwischen drei Möglichkeiten wählen kann: Team 1 gewinnt, das Spiel endet unentschieden, Team 1 verliert. Eine Vorhersage für die 12 Spiele des Spielprogrammes wird als Tipp bezeichnet. Das Gewinnereignis ist folgendermaßen definiert: Alle Tipps mit 12 korrekten Vorhersagen gewinnen im 1. Rang, alle Tipps mit genau 11 korrekten Vorhersagen gewinnen im 2. Rang und alle Tipps mit genau 10 richtigen Vorhersagen gewinnen im 3. Rang. Die Höhe des Gewinns eines Tipps wird auf folgende Weise berechnet: Alle Wetteinsätze werden gepoolt und der Anteil des Veranstalters (*take-out*) wird abgezogen. 50% des verbleibenden Pools werden zu gleichen Teilen an die Gewinner im 1. Rang ausbezahlt. Auf die Gewinner im 2. und 3. Rang werden je 25% des Pools zu gleichen Teilen aufgeteilt. Bei der *Torwette* besteht ein Tipp aus der Prognose der präzisen Resultate, wie z.B. 2:1, von 4 vom Veranstalter vorgegebenen Fußballspielen. Ein Tipp gewinnt, wenn 3 oder 4 der 4 präzisen Resultate korrekt vorhergesagt wurden. Die Gewinnhöhe wird analog zum Toto folgendermaßen berechnet: Alle Wetteinsätze werden gepoolt und der Anteil des Veranstalters wird abgezogen. 60% der verbleibenden Gewinnsumme werden zu gleichen Teilen an die Gewinner im 1. Rang (4 korrekte Vorhersagen) ausbezahlt, 30% an die Gewinner im 2. Rang (3 korrekte Vorhersagen). Die verbleibenden 10% werden an die Gewinner des Hattricks ausbezahlt. Der Hattrick wird dann gewonnen, wenn alle vier Spielresultate richtig prognostiziert wurden und gleichzeitig auf dem Wertschein ein Tototipp mit 12 richtigen Vorhersagen vorliegt. Da dieses Gewinnereignis sehr selten eintritt, werden wir es in unserer Analyse unberücksichtigt lassen. Gibt es in einem Rang keinen einzigen Gewinner, kommt es bei beiden Spielen zu einem *Jackpot*. In diesem Fall wird die nicht ausgeschüttete Gewinnsumme den Gewinnern der folgenden Runde im selben Rang zugeschlagen.

Daten

Für die Analyse wurden uns von den Österreichischen Lotterien die Daten über alle Tipps von 166 Runden von Jänner 1996 bis März 1999 zur Verfügung gestellt. Unsere Berechnungen beruhen somit auf 145 Mio. Einzeltipps. Zur Bestimmung der *objektiven* Spielausgangswahrscheinlichkeiten verwendeten wir die Gewinnquoten verschiedener österreichischer Buchmacher, die wöchentlich in der “Sport Zeitung” publiziert werden. Für 93 der 166 Totorunden und für 419 Torwette-Spiele gab es die entsprechenden Gewinnquoten der Buchmacher. Es wurden somit für 93 Totorunden die

“objektiven” und die optimalen Spielstrategien berechnet und mit den tatsächlich gespielten Tipps verglichen.

Der Artikel ist folgendermaßen aufgebaut: Im Abschnitt 2 führen wir anhand eines einfachen Modells in die Problematik von Totalisatorspielen mit ungleichen Spielausgangswahrscheinlichkeiten und die entsprechende Notation ein. Weiters wird das Phänomen des rationalen Überwettens der Favoriten demonstriert. Danach entwickeln wir eine Formel für den Payoff im Toto, aus der dann die Formel für die optimale Spielstrategie im symmetrischen Gleichgewicht hergeleitet wird. In Abschnitt 5 werden die objektiven Wahrscheinlichkeiten aus den Buchmacherdaten berechnet. Damit werden in Abschnitt 6 die optimalen Spielstrategien berechnet und einem Vergleich mit den objektiven Wahrscheinlichkeiten unterzogen. Eine optimale Spielstrategie ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über alle der 531.441 beim Toto möglichen Tippkombinationen, die sich am besten mit einer kumulierten Wahrscheinlichkeitsfunktion darstellen läßt. Anschließend werden objektive und optimale Wahrscheinlichkeiten für einige Torwette-Runden berechnet. Der Vergleich mit den empirischen Spielstrategien und Überlegungen zu den Möglichkeiten, strategische Gewinne zu erzielen sind in den Abschnitten 8 und 9 zu finden. Eine Diskussion der Ergebnisse schließt den Artikel ab.

2 Rationales Spielverhalten – ein einfaches Beispiel

Wir wollen die strategische Situation von Teilnehmern einer Ausspielung nach dem Totalisatorprinzip, bei der die einzelnen Spielausgänge nicht gleichwahrscheinlich sind, untersuchen. Die hier gewählten Spiele *Toto* und *Torwette* sind Beispiele für solche Spiele¹, ähnliche Prinzipien gelten etwa aber auch für (Totalisator-)Pferdewetten.

Wir möchten ein einfaches Beispiel, welches die Charakteristika derartiger totoähnlicher Spiele verdeutlicht, an den Anfang der Betrachtungen stellen.

Beispiel:

Der Spielleiter zieht eine Kugel aus einer Urne, welche mit n schwarzen und m roten Kugeln gefüllt ist. Es gibt zwei risikoneutrale Normalspieler (Spieler 1 bzw. 2), die je genau einen *Tipp* abgeben. Bei der Abgabe des Tipps ist ein Einsatz von einer Geldeinheit (GE) zu leisten und die Farbe der gezogenen Kugel vorherzusagen. Den Spielern ist bei der Tippabgabe bekannt, wieviele schwarze bzw. rote Kugeln sich in der Urne befinden, nicht jedoch, welche Farbe der andere Spieler vorhergesagt hat. Stimmt die vorhergesagte Farbe mit der Farbe der letztlich gezogenen Kugel überein, tritt der Gewinnfall ein: Jener Spieler erhält die *Gewinnquote*, welche dem insgesamt geleisteten Einsatz dividiert durch die Zahl der Gewinner entspricht. Wir betrachten also ein Spiel mit einer Auszahlungsquote von 100%. Bei zwei Spielern sind in diesem Fall nur die Gewinnquoten 1 GE und 2 GE möglich. Falls kein Spieler die gezogene Farbe vorhersagt, gehen die geleisteten Einsätze in den Jackpot und gelten für die Spieler als verloren.

Im Spezialfall $n = m$ reduziert sich das Beispiel auf den Münzwurf-Fall, der in Boss et al. (1998) und Hauser und König (1999) behandelt wurde. Sei $p_r \equiv m/(m+n)$ die *objektive* Wahrscheinlichkeit der Ziehung einer roten Kugel und $p_s \equiv n/(m+n)$ analog die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel gezogen wird. Beide Spieler 1 und 2 verfügen über je zwei Strategien: R (Vorhersage von Rot) und S (Vorhersage von Schwarz).

¹Eine grundlegende Beschreibung der Prinzipien von Totalisatorspielen sowie die Analyse des wesentlich einfacheren Falles gleicher Erfolgswahrscheinlichkeiten einzelner Spielstrategien (d.h. Tipps), wie sie etwa beim Lotto “6 aus 45” vorliegen, sind Boss et al.(1998) sowie Hauser und König (1999) zu entnehmen.

Die Normalform des vorliegenden Spieles kann wie folgt dargestellt werden:

1 2	R	S
R	$p_r - 1$ $p_r - 1$	$2p_r - 1$ $2p_s - 1$
S	$2p_s - 1$ $2p_r - 1$	$p_s - 1$ $p_s - 1$

Abbildung 1: Normalform eines totoähnlichen Spieles.

Für die Strategiewahl ist der Einsatz von einer Geldeinheit, der stets geleistet werden muss, unerheblich, weiters gilt $p_s = 1 - p_r$. Wir vereinfachen daher zu:

1 2	R	S
R	p_r p_r	$2p_r$ $2(1 - p_r)$
S	$2(1 - p_r)$ $2p_r$	$(1 - p_r)$ $(1 - p_r)$

Abbildung 2: Normalform mit Bruttogewinnen (Parameter p_r).

Jeder der beiden Spieler wählt seine Strategie aus einer für beide identischen Strategiemenge $\Delta(R, S)$, wobei $\Delta(R, S)$ alle möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen über die Vorhersagen R und S bezeichnet. Ein Element aus $\Delta(R, S)$ kann in dem vorliegenden einfachen Fall durch eine Wahrscheinlichkeit $0 \leq q_r \leq 1$ beschrieben werden, da die Gegenwahrscheinlichkeit $(1 - q_r)$ genau der Wahrscheinlichkeit der Wahl von Schwarz, q_s , entspricht. Der Payoff von Spieler i , $u_i(q_r^1, q_r^2)$ bei Wahl der Strategiekombination (q_r^1, q_r^2) ergibt sich als Erwartungswert aus den Einträgen der Normalform.

Wir definieren das Lösungskonzept für obiges Spiel:²

Definition 1. Eine Strategiekombination $\hat{q}_r^1, \hat{q}_r^2 \in \Delta(R, S) \times \Delta(R, S)$ heißt Nash-Gleichgewicht, wenn für beide Spieler $i = 1, 2$ gilt:

$$\hat{q}_r^i \in \operatorname{argmax}_{q_r^i \in \Delta(R, S)} u_i(\hat{q}_r^{-i}, q_r^i) \quad (1)$$

wobei q_r^{-i} die Strategiewahl des jeweils anderen Spielers bezeichnet.

Wie schon in Hauser und König (1999) bemerkt, existieren im Spezialfall $p_r = 0.5$ drei Gleichgewichte, von denen zwei *asymmetrische* Gleichgewichte in reinen Strategien sind (beide Spieler wählen unterschiedliche Farben mit einer Wahrscheinlichkeit von 1) und ein *symmetrisches* Gleichgewicht in gemischten Strategien. Symmetrische Gleichgewichte sind aufgrund des Charakters des untersuchten Spieles von besonderem Interesse. Die Payoffstruktur erfordert *Koordination* der Spieler - nämlich unterschiedliche Farbenwahl. In einem Spiel wie Toto mit hunderttausenden Mitspielern und über 500.000 möglichen Ziehungsergebnissen ist eine solche Koordination undenkbar. Eine Gleichgewichtsselektion in dem Sinne, dass nur symmetrische Gleichgewichte betrachtet werden, erscheint daher sinnvoll.

Man ist versucht, das Resultat $p_r = q_r^i$ für alle Spieler i , welches im gemischten Gleichgewicht des Spezialfalls $p_r = 0,5$ Gültigkeit besitzt, auf den Fall $q_r \neq q_s$ zu verallgemeinern. Die Intuition, dass jeder Spieler optimalerweise seine individuelle Wahrscheinlichkeitsverteilung q nach

²Die Definition kann auf wesentlich allgemeinere Fälle erweitert werden, insbesondere auf den Fall von I Spielern und n möglichen reinen Strategien. Siehe z.B. Myerson (1991).

den Ziehungswahrscheinlichkeiten p richtet, ist jedoch falsch. Wir beobachten zuerst, dass im Fall $p_r \in (2/3, 1)$ die Strategie "R" (Prognose der Ziehung von Rot) eine *dominante Strategie* für beide Spieler ist; d.h. der Payoff der Wahl von R ist immer, *unabhängig* von der Aktion des Mitspielers, höher. Es kann daher kein Gleichgewicht in (echt) gemischten Strategien existieren, und das einzige Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien ist durch (R, R) gegeben. Entsprechendes gilt für $p_r \in (0, 1/3)$, in welchem Fall (S, S) das einzige Gleichgewicht ist. Man beachte, dass es sich um symmetrische Gleichgewichte handelt! Weiters wird in beiden Fällen trotz der Tatsache, dass beide Farben in der Urne vorhanden sind, von beiden Spielern die häufiger vorhandene Farbe mit Wahrscheinlichkeit 1 gewählt.

Es verbleibt der Bereich $p_r \in (1/3, 2/3)$, welcher dem Fall entspricht, in der die Zahlen der roten bzw. schwarzen Kugeln in der Urne nicht zu stark voneinander abweichen. Betrachten wir exemplarisch den Fall $p_r = 0,4$ (4 rote und 6 schwarze Kugeln):

1 2	R	S
R	0,4 0,4	0,8 1,2
S	1,2 0,8	0,6 0,6

Abbildung 3: Spezialfall $p_r = 0,4$.

Hier existiert außer den Gleichgewichten in reinen Strategien (R, S) und (S, R) , welche Koordination erfordern, ein Gleichgewicht in gemischten Strategien. Damit ein Spieler im Optimum eine Strategie mit $0 < q_r < 1$ wählt, muss der *Payoff* für beide reinen Strategien R und S gleich sein. Wir betrachten also zum Beispiel Spieler 2 und erhalten

$$u^2(R) = 0,4q_r^1 + 0,8(1 - q_r^1) = 1,2q_r^1 + 0,6(1 - q_r^1) = u^2(S) \quad (2)$$

u^i bezeichnet hier und im Folgenden den Payoff von Spieler i . Auflösen der Gleichung ergibt $q_r^1 = 0,2$, das ist jene Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler 1 Rot vorhersagen muss, damit Spieler 2 zwischen der Wahl von Rot und Schwarz indifferent ist. In der Tat erhalten wir $q_r^2 = 0,2$, wenn Spieler 1 betrachtet wird. Die Strategienkombination $(0,2; 0,2)$ stellt also ein symmetrisches Nash-Gleichgewicht dar. Für allgemeines $p_r \in (1/3, 2/3)$ erhalten wir auf die gleiche Weise $q_r^i = 3p_r - 1$ für $i = 1, 2$. In Abbildung 4 wird das gleichgewichtige q_r als Funktion von p_r dargestellt.

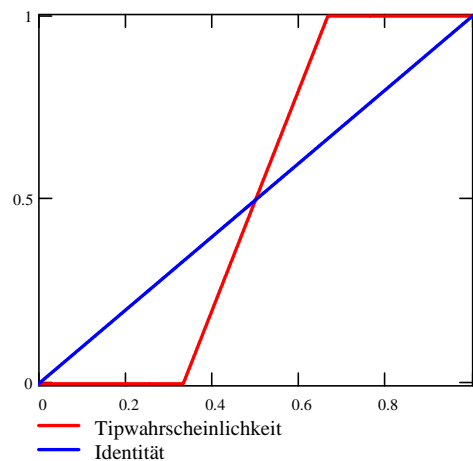


Abbildung 4: Tippwahrscheinlichkeit q_r und Ziehungswahrscheinlichkeit p_r im symmetrischen Gleichgewicht.

Wir erkennen, dass die individuelle Tippwahrscheinlichkeit nur an drei Stellen mit der objektiven Ziehungswahrscheinlichkeit übereinstimmt: bei $p_r = 0$, $p_r = 1$ (triviale Fälle) sowie $p_r = 0,5$. Sobald von einer Farbe mehr Kugeln in der Urne enthalten sind als von der anderen, werden die Spieler die häufigere Farbe öfter vorhersagen, als dies durch die Ziehungswahrscheinlichkeit gerechtfertigt erscheint. Wir bezeichnen dieses Phänomen als *Überwetten der Favoriten* in einem Totalisatorspiel.

Wir erhalten den Payoff im Gleichgewicht durch Einsetzen der optimalen Strategie $q_r^i = 3p_r - 1$. Da der Payoff für beide reinen Strategien und beide Spieler gleich ist, wählen wir z.B. den Payoff von Spieler 1 bei der Wahl von R, welcher $q_r^2 p_r + (1 - q_r^2) 2p_r$ beträgt. Einsetzen und umformen ergibt $-3(p_r)^2 + 3p_r$. Die Payoff-Funktion ist in Abbildung 5 dargestellt, wobei zu beachten ist, dass im Bereich $p_r < 1/3$ bzw. $p_r > 2/3$ reine Strategien gespielt werden, deren Payoff einfach $\max(p_r, 1 - p_r)$ ist.

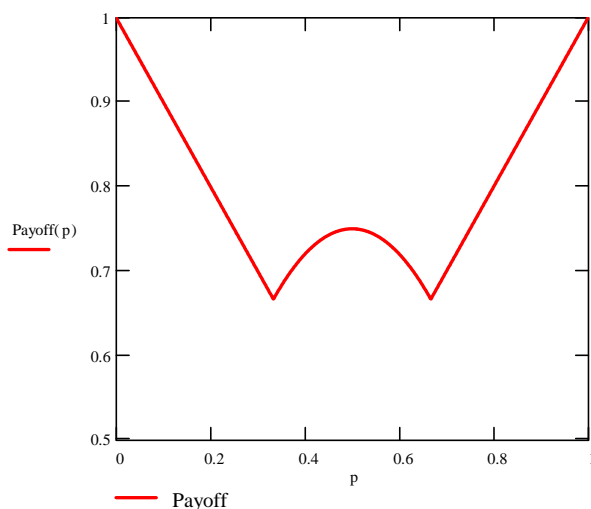


Abbildung 5: Gleichgewichtspayoff bei variierendem p_r .

Der hier dargestellte Brutto-Payoff erreicht lediglich in den degenerierten Fällen $p_r = 1$ und $p_r = 0$ (nur rote bzw. schwarze Kugeln vorhanden) die Einsatzhöhe von 1, obwohl die take-out Rate bei Null angesetzt wurde. Dies ist intuitiv dadurch zu begründen, dass ansonsten die *Gefahr eines Jackpots* besteht, in welchem Fall die Spieler ihren Einsatz verlieren. Ein lokales Maximum liegt bei $p_r = 0,5$, da bei diesem Wert die effiziente Strategie der Anwendung objektiver Ziehungswahrscheinlichkeiten bei der Bestimmung der eigenen Vorhersage auch ein Gleichgewicht darstellt.

3 Payoff im Toto

Obiges Beispiel lässt vermuten, dass ähnliche Gesetzmäßigkeiten die Tippabgabe eines rationalen Toto-(oder Torwette-)spielers bestimmen. Wir treffen folgende Annahme:

Annahme 1. *Jeder Totospieler nimmt entweder nur mit einem Einzeltip an der Ausspielung teil oder wählt mehrere Einzeltips so, als ob er nicht wüsste, dass er auch andere Tipps abgegeben hat.*

Diese Annahme wird benötigt, um Komplikationen auszuschließen, die dadurch entstehen, dass ein einzelner Spieler über die abgegebenen Tipps nicht vollständig uninformat ist, sondern in Wirklichkeit einen kleinen Teil der Tipps kennt (nämlich seine eigenen). Wie schon in Hauser und König (1999) für den Fall von Lotto “6 aus 45” ausgeführt, wird eine Ausnutzung dieser Information jedoch den Payoff solange nicht wesentlich beeinflussen, wie der Einsatz des Einzelspielers im Vergleich zum gesamten Pool klein ist. Adaptionen wären allenfalls bei Überschreiten eines Einsatzes von ATS 100.000,- durch einen Spieler erforderlich.

Sei Z die Menge aller möglichen Tipps (siehe dazu auch Abschnitt 5). Betrachten wir nun eine Tippreihe $z \in Z$, deren objektive Auftrittswahrscheinlichkeit mit $p(z)$ gegeben ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Tippreihe von Spieler i gewählt wird, sei $q^i(z)$. Wegen der Symmetrie gilt $q^i(z) = q^j(z) \equiv q(z)$ für alle Spieler i, j und alle $z \in Z$. Der Payoff von Spieler i bei der Wahl von Tippreihe z , $u^i(z)$ ist dann

$$\begin{aligned} u^i(z) = & p(z) \sum_{t=0}^{T-1} \binom{T-1}{t} q(z)^t (1-q(z))^{T-t-1} \left(\frac{b(1-h)s_1 T + J_1}{t+1} \right) + \\ & \sum_{y \in Z_{-1}} p(y) \left[\sum_{t=0}^{T-1} \binom{T-1}{t} \left(\sum_{y \in Z_{-1}} q(y) \right)^t \left(1 - \sum_{y \in Z_{-1}} q(y) \right)^{T-t-1} \left(\frac{b(1-h)s_2 T + J_2}{t+1} \right) \right] + \\ & \sum_{y \in Z_{-2}} p(y) \left[\sum_{t=0}^{T-1} \binom{T-1}{t} \left(\sum_{y \in Z_{-2}} q(y) \right)^t \left(1 - \sum_{y \in Z_{-2}} q(y) \right)^{T-t-1} \left(\frac{b(1-h)s_3 T + J_3}{t+1} \right) \right] \end{aligned}$$

wobei T die Gesamtzahl der gespielten Tipps in der betrachteten Runde ist. b steht für den Einsatz pro Tipp, h für die take-out Rate des Veranstalters und s steht für die Rangdotation. Beispielsweise gibt die Rangdotation s_1 den Anteil an der Gewinnsumme an, der an die Gewinner im 1. Rang ausbezahlt wird. Die Jackpotterme J_1, J_2, J_3 enthalten auch allfällige Sonderdotationen. $Z_{-1} \subset Z$ definieren wir als die Menge von Tippreihen, in der, verglichen mit Reihe z , genau ein Spiel falsch getippt ist. Analog sei $Z_{-2} \subset Z$ die Menge von Tippreihen, bei denen genau zwei Spiele falsch sind. Die erste Zeile der Payoff-Formel bezieht sich auf den 1. Rang, d.h. den Zwölfer.

Die Zwölferquote bei t anderen Gewinnern ergibt sich zu $\frac{b(1-h)s_1 T + J_1}{t+1}$, und die Zufallsvariable "Zahl der anderen Gewinner" folgt einer Binomialverteilung mit Parametern $T-1$ und $q(z)$. Durch Multiplikation mit der Auftrittswahrscheinlichkeit von Tippreihe z , $p(z)$, erhält man den erwarteten Ergebnisbeitrag aus der Möglichkeit eines Zwölfergewinns. Analog wird mit Elfer und Zehner (zweite und dritte Zeile) verfahren.

Zwecks Vereinfachung der Payoff-Formel können wir ähnlich wie in Boss et al. (1998), S.54/55, die Binomialverteilung durch die Poissonverteilung approximieren und erhalten nach Herausheben und Zusammenfassen von Termen für den Ergebnisbeitrag des Zwölfers u_{12} :

$$u_{12}^i(z) = p(z) e^{-(q(z)(T-1))} (b(1-h)s_1 T + J_1) \sum_{t=0}^{T-1} \frac{(q(z)(T-1))^t}{(t+1)!} \quad (3)$$

Für großes T , wie es bei Toto gegeben ist, können wir nicht nur $T-1 \cong T$ setzen (Vernachlässigung des Effekts des eigenen Tipps), sondern auch den Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{t=0}^{T-1} \frac{(q(z)(T-1))^t}{(t+1)!} = e^{(q(z)(T-1))} - 1 \quad (4)$$

zur weiteren Vereinfachung einsetzen, sodass wir für den Zwölferbeitrag schließlich

$$u_{12}^i(z) = \left[\frac{p(z)}{q(z)} \left(1 - e^{-q(z)T} \right) \right] \left[b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right] \quad (5)$$

erhalten. Mit Elfer- und Zehnerbeitrag wird genauso verfahren. Wir schreiben $p(Z_{-r}) \equiv \sum_{y \in Z_{-r}} p(y)$ bzw. $q(Z_{-r}) \equiv \sum_{y \in Z_{-r}} q(y)$ für $r = 1, 2$ zur Verkürzung. Somit:

$$\begin{aligned} u^i(z) = & \left[\frac{p(z)}{q(z)} (1 - e^{-q(z)T}) \right] \left[b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right] + \\ & \left[\frac{p(Z_{-1})}{q(Z_{-1})} (1 - e^{-q(Z_{-1})T}) \right] \left[b(1-h)s_2 + \frac{J_2}{T} \right] + \\ & \left[\frac{p(Z_{-2})}{q(Z_{-2})} (1 - e^{-q(Z_{-2})T}) \right] \left[b(1-h)s_3 + \frac{J_3}{T} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Diese Formel besitzt eine einleuchtende Interpretation. Die Ausdrücke auf der rechten Seite entsprechen der *Rangdotation pro Tipp* für die Ränge 1 bis 3. Wäre $p(\cdot) = q(\cdot)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit der Auswahl bestimmter Tippreihen entspräche ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit, ergibt sich der Payoff aus der Summe der Rangdotationen pro Tipp *abzüglich* eines für jeden Rang zu berechnenden *Jackpotgefahr-faktors* $e^{-q(z)T}$. Dieser Term spiegelt die Gefahr wieder, dass die Rangdotation in der gegebenen Runde wegen eines Jackpots gar nicht zur Auszahlung kommt. In einem symmetrischen Gleichgewicht ist die Möglichkeit eines Jackpots immer gegeben. Jackpots aus Vorrunden erhöhen den Payoff, die Möglichkeit des Auftretens von Jackpots *in der gegebenen Runde* verringern ihn (im Erwartungswert). Man beachte jedoch, dass der Jackpot-gefahr-faktor für steigendes $q(z)T$ gegen Null geht. Zur Verdeutlichung können wir das Farbenspiel aus unserem Beispiel mit der Modifikation betrachten, dass es nicht zwei, sondern etwa tausend Spieler gibt. Für den Fall $q(R) = q(S) = 0,5$ etwa wäre dann $e^{-q(R)T} = e^{-q(S)T} = 7,1(10^{-218})$, also für alle praktischen Zwecke gleich Null. Umgekehrt ergäbe sich für ein Spiel wie Toto mit einem typischen $q(z) = (1/500000)$ und (nur) 1000 Spielern ein Faktor von $e^{-(1/500)} = 0,998$. In einem solchen Fall wäre die Jackpotgefahr so groß, dass das Spiel selbst bei einer niedrigen take-out Rate oder hohen akkumulierten Jackpots aus Vorrunden unattraktiv sein kann. Auf diese Problematik werden wir im Rahmen der Besprechung der Torwette noch zurückkommen.

Wir werden die Terme J_2 und J_3 gleich Null setzen, da (mit einer Ausnahme) im Betrachtungszeitraum lediglich Jackpots im Zwölfer vorkamen. Konsequenterweise setzen wir die Jackpot-gefahr-Faktoren für den zweiten und dritten Rang ebenfalls auf Null. Da $q(Z_{-1})$ wesentlich größer als $q(z)$ ist, wird der Faktor für den Elfer (bei konstantem T) bereits sehr klein sein. Für den Zehner liegt der Faktor praktisch bei Null. Um eine weitere rechentechnische Schwierigkeit zu beseitigen, führen wir eine zusätzliche Annahme ein:

Annahme 2. Wir setzen $\frac{p(Z_{-1})}{q(Z_{-1})} = \frac{p(Z_{-2})}{q(Z_{-2})} = \frac{p(z)}{q(z)}$.

Obige Annahme ist jedenfalls dann gerechtfertigt, wenn die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Tippreihe, die "ähnlich" zu z ist, sich von der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von z nur geringfügig unterscheidet. Dabei wären zwei Tippreihen "ähnlich", wenn sie sich in maximal zwei Positionen unterscheiden. Wären die Wahrscheinlichkeiten gleich, würden wir erhalten

$$p(Z_{-1}) = \#Z_{-1}p(z) \quad \text{bzw.} \quad q(Z_{-1}) = \#Z_{-1}q(z) \quad (7)$$

$$q(Z_{-2}) = \#Z_{-2}p(z) \quad \text{bzw.} \quad q(Z_{-2}) = \#Z_{-2}q(z) \quad (8)$$

Hier gibt $\#Z_{-r}$ die Mächtigkeit der Menge Z_{-r} an. Da es zwölf Spiele gibt, die möglicherweise falsch getippt werden können, und zwei Möglichkeiten eines falschen Tipps pro Spiel, ergibt sich $\#Z_{-1} = 24$. Im Falle des Zehners gibt es $\binom{12}{2} = 66$ Möglichkeiten, zwei falsche Tipps abzugeben, und insgesamt 4 falsche Tipps (z.B., wenn der korrekte Tipp in den beiden Spielen 1 und X lautet, so sind die vier falschen Tipps, welche zu einem Zehner führen, X/1, X/2, 2/1 und 2/2). Damit ist $\#Z_{-2} = 264$. Diese Faktoren würden sich im Verhältnis $\frac{p(Z_{-r})}{q(Z_{-r})}$ nicht niederschlagen, da sie sich herauskürzen. Die Gleichungen (7) und (8) sind jedoch keine notwendige Voraussetzung dafür, dass Annahme 2 zumindest näherungsweise erfüllt ist.

Bei Gültigkeit von Annahme 2 und Vernachlässigung der Jackpotgefahr-Faktoren für den zweiten und dritten Rang erhalten wir als Payoff

$$u^i(z) = \frac{p(z)}{q(z)}(1 - e^{-q(z)T}) \left(b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right) + \frac{p(z)}{q(z)}(b(1-h)s_2) + \frac{p(z)}{q(z)}(b(1-h)s_3) \quad (9)$$

oder

$$u^i(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \left(b(1-h) + \frac{J_1}{T} \right) - \frac{p(z)}{q(z)} \left(b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right) e^{-q(z)T} \quad (10)$$

Es ist zu sehen, dass nun nur mehr der aus der Dotation des ersten Ranges stammende Payoff-Anteil durch den Jackpotgefahr-Faktor geschmälert wird.

4 Optimale Spielstrategie im symmetrischen Gleichgewicht

Nachdem wir die Payoff-Funktion für Toto ermittelt haben, wenden wir uns nun der Ermittlung der optimalen $q^i(z)$ zu. Genau so wie in dem eingangs beschriebenen Beispiel muss in einem echt gemischten symmetrischen Gleichgewicht für jeden Spieler gelten, dass der Payoff jeder Tippreihe gleich ist (ansonsten wäre $q^i(z') = 0$ für alle z' mit $z' < \max_Z \{z\}$). Hier muss also für beliebige z, z' gelten:

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{q(z)} \left(b(1-h) + \frac{J_1}{T} \right) - \frac{p(z)}{q(z)} \left(b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right) e^{-q(z)T} = \\ \frac{p(z')}{q(z')} \left(b(1-h) + \frac{J_1}{T} \right) - \frac{p(z')}{q(z')} \left(b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right) e^{-q(z')T} \end{aligned} \quad (11)$$

wobei $q(z)$ bzw. $q(z')$ die Unbekannten sind.

Im Beispiel am Anfang dieses Abschnittes haben wir gesehen, dass auch der Fall $q(z) = 0$ für bestimmte z ein symmetrisches Gleichgewicht darstellen kann. Dieser Fall tritt ein, wenn für die Gleichung $u^i(z) = u^i(z')$ keine Lösung mit $q(z) > 0, q(z') > 0$ existiert. Eine derartige *Randlösung* ist natürlich auch im Fall von Toto möglich. Mit der hier verwendeten Payoff-Funktion lässt er sich allerdings nicht identifizieren, da

$$\lim_{q(z) \rightarrow 0} u^i(z) \rightarrow \infty \quad (12)$$

Dieses unbefriedigende Resultat ist eine Folge der zahlreichen Approximationen, die erforderlich waren, um die numerische Berechnung von $q(z)$ für ein Spiel mit $\#Z > 500.000$ erst zu ermöglichen.³ Wir müssen uns daher auf echt gemischte Gleichgewichte beschränken.

Mit (11) werden $\#Z - 1 = 531.440$ Gleichungen zur Bestimmung der 531.441 unbekannten Werte von $q(z), z \in Z$ definiert. Die 531.441ste Gleichung, welche das System vervollständigt, lautet

$$\sum_{z \in Z} q(z) = 1 \quad (13)$$

da es sich um Wahrscheinlichkeiten handelt. Dieses System von 531.441 nichtlinearen Gleichungen dürfte wegen (12) eine Lösung mit $q(z) > 0 \forall z \in Z$ besitzen.

Bevor wir zur tatsächlichen Berechnung von $q(z)$ gelangen, sind einige qualitative Aussagen notwendig.

Satz 1. (*Erhalt der Ordnung*) *Im gemischten symmetrischen Gleichgewicht eines durch $(b, h, s_1, J_1, T, p, Z)$ beschriebenen Totospiels gilt für die Strategiewahl $q(\cdot)$:*

- (a) *Wenn $p(y) \geq p(y'), y, y' \in Z$, so $q(y) \geq q(y')$.*
- (b) *Wenn $p(y) = p(y')$, dann und nur dann $q(y) = q(y')$.*

Beweis: Sei $\mathcal{P}_1 \equiv Tb(1-h)s_1 + J_1$ jener Teil des Pools, welcher in den 1. Rang fließt und $\mathcal{P}_{-1} \equiv Tb(1-h)(1-s_1)$ der Rest, welcher den Rängen 2 und 3 zugute kommt. Für alle $z \in Z$ gilt nun

$$\frac{\mathcal{P}_{-1}}{q(z)T} + \frac{\mathcal{P}_1}{q(z)T} (1 - e^{-q(z)T}) = \frac{const}{p(z)} \quad (14)$$

Aus (14) folgt sofort die eine Richtung von (b). Man betrachte y und y' mit $p(y) \geq p(y')$. Da die rechte Seite von (14) beim Übergang von y auf y' nicht fällt, kann auch die linke Seite nicht fallen. Sei $q(y) < q(y')$. Da dann jedenfalls gilt $\frac{\mathcal{P}_{-1}}{q(y)T} > \frac{\mathcal{P}_{-1}}{q(y')T}$, müßte auch $\frac{\mathcal{P}_1}{q(y)T} (1 - e^{-q(y)T}) <$

³Erstens müßte bei fallender Wahrscheinlichkeit q die Zahl der Tipps T gegen unendlich gehen, um die Approximation der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung zu erlauben. Zweitens wird durch das Weglassen der Jackpotgefahr-Faktoren ein Fehler eingeführt, der für sehr unwahrscheinliche Tippreihen größer wird. Da dies nur für Reihen, welche hinreichend unwahrscheinlich sind, sodass selbst ein Elferjackpot (bzw. Zehnerjackpot) generiert wird, eine Rolle spielt, wird der empirisch festgestellte relevante Bereich davon nicht berührt.

$\frac{P_1}{q(y')T}(1 - e^{-q(y')T})$ gelten, damit die Gleichung gültig bleibt. Betrachten wir die differenzierbare Funktion

$$f(x) = \frac{a}{x}(1 - e^{-x}) \quad (15)$$

Wir zeigen, dass $f(x) > 0$ im ganzen Bereich $x > 0$ monoton fällt. Sei $g(x) = \ln(x)$ und $h(x) \equiv g(f(x))$. Dann

$$h(x) \equiv \ln(f(x)) = \ln(a) - \ln(x) + \ln(1 - e^{-x}) \quad (16)$$

und

$$h'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \quad (17)$$

Aufgrund der Kettenregel gilt $h'(x) = g'(f(x))$ bzw. $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Somit

$$f'(x) = f(x) \left(-\frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) \quad (18)$$

Wenn $x < \frac{1-e^{-x}}{e^{-x}}$ so ist $f'(x)$ negativ. Dies gilt aber da $x < (e^x - 1)$. Da $f(x)$ also monoton fällt, kann $f(q(y)) < f(q(y'))$ für $q(y) < q(y')$ nicht gelten, was Aussage (a) beweist. Ebenso folgt aus der strikten Monotonie der linken Seite von (18), dass, falls $p(y) \neq p(y')$, so ist $q(y) \neq q(y')$, was die zweite Richtung von (b) beweist.

Satz 2. (*Überwetten von Favoriten*) *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 1 gilt:*

Wenn $p(y) > p(y')$, dann und nur dann $\frac{p(y)}{q(y)} < \frac{p(y')}{q(y')}$.

Beweis: Sei \mathcal{P} der gesamte Pool. Es gilt für alle $z \in Z$:

$$\frac{p(z)}{q(z)} \left(\frac{\mathcal{P}}{T} - \frac{P_1}{T} e^{-q(z)T} \right) = \text{const} \quad (19)$$

Aus der Kombination von Aussagen (a) und (b) aus Satz 1 folgt $p(y) > p(y') \rightarrow q(y) > q(y')$. Daher wird der Klammerausdruck aus (19) beim Übergang von y auf y' kleiner, weswegen $\frac{p(y)}{q(y)} < \frac{p(y')}{q(y')}$ zwingend ist. Die Umkehrung lässt sich durch Vertauschen von y und y' verifizieren; wenn $p(y) = p(y')$, so auch $\frac{p(y)}{q(y)} = \frac{p(y')}{q(y')}$ wegen Satz 1 (b).

Mit steigender "objektiver" Wahrscheinlichkeit einer Tippreihe wird diese also *überproportional* stärker gewettet. Wenn also Aussagen über Anomalien im Spielerverhalten gemacht werden (etwa: es wird häufiger auf Heimsiege gewettet, als dies durch die Auftrittshäufigkeit von Heimsiegen gerechtfertigt erscheint), muss dieser Aspekt stets beachtet werden, solange ein Totalisatorspiel mit nicht vernachlässigbarer Jackpotwahrscheinlichkeit betrachtet wird. Aus (19) ist auch ersichtlich, dass das Phänomen des Überwettens von Favoriten umso stärker wird, je

- niedriger die Beteiligung an dem Spiel (T) ist;
- höher der Anteil des Pools ist, welcher auf Ränge entfällt, in denen häufig Jackpots entstehen.

Inwieweit sich diese Ergebnisse in den Daten zu Toto und Torwette widerspiegeln, wird in Abschnitt 8 beleuchtet. Wir kommen nun zur numerischen Berechnung der Werte für $q(z)$.

5 Berechnung der Eintrittswahrscheinlichkeiten

Wir gehen davon aus, dass es für jedes im Programm enthaltene Fußballspiel eine "objektive" Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Ausgänge gibt, die jedem Teilnehmer bekannt ist und die

Grundlage der Strategiewahl bildet. Diese Wahrscheinlichkeiten sollen mit $pe_m(y)$ bezeichnet werden, wobei y ein Element der Menge aller möglichen Resultate Y ist⁴ und $m \in \{1, 2, \dots, 12\}$ ⁵ die Programmzahl des Spieles angibt. Spieler A aus dem obigen Beispiel würde in diesem Sinne "Rapid gegen Austria" als Ziehung einer Kugel aus einer Urne mit 10 Kugeln, von denen 5 mit "1", 2 mit "X" und 3 mit "2" beschriftet sind, betrachten. Diese Vorstellung könnte man mit Recht auch als "Lottomodell" bezeichnen, da der einzige wesentliche Unterschied zum Lotto darin besteht, dass die einzelnen Ausgänge nicht notwendigerweise gleichwahrscheinlich sind.

Sei nun Z die Menge aller möglichen Tipps, sodass etwa $(1, 1, 2, X, 2, 1, 1, 1, 1, X, X, 1)$ oder allgemein $z = (z_1, z_2, \dots, z_{12})$ ein Element von Z ist und $z_m \in Y$ für $m = \{1, 2, \dots, 12\}$. Z hat, wie zuvor bemerkt, eine Mächtigkeit von $\#Z = 531.441$, aber die Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Elemente sind im Unterschied zum Lotto nicht gleich. Gegeben die Wahrscheinlichkeiten pe_m für alle m lassen sich die Tippreihenwahrscheinlichkeiten, also die *objektive Wahrscheinlichkeit*, dass eine bestimmte Tippreihe z auch tatsächlich auftritt, $p(z)$ leicht bestimmen.

Da die Ausgänge der einzelnen Spiele voneinander unabhängig sind, gilt der Multiplikationssatz:

$$p(z) = \prod_{m=1}^{12} pe_m(z_m) \quad (20)$$

Analoges gilt für die Torwette. Das Problem reduziert sich also darauf, Daten über die Spieldausgangswahrscheinlichkeiten pe_m zu erhalten.

In Österreich besteht wie in vielen anderen Staaten die Möglichkeit, Wetten auf den Ausgang von Fußballspielen bei privaten Firmen, die als Buchmacher bezeichnet werden, zu platzieren. Vom Wettgegenstand her steht dieses Gewerbe, das in den letzten zehn Jahren einen starken Aufschwung erlebt hat, daher in direkter Konkurrenz zum Toto. Die technische Durchführung der Ausspielung ist allerdings eine völlig andere. Da es möglich ist, auf beliebige einzelne Spiele aus einem breiten Programm zu wetten, ist das Totalisatorprinzip schlecht anzuwenden. Die Wetten sind daher Fixquotenspiele, womit der Buchmacher ein zusätzliches Risiko zu tragen hat.

Der Buchmacher erstellt also ein Wettprogramm, in dem erfahrungsgemäß populäre Fußballspiele enthalten sind. Jedes wettbare Spiel erhält *Quoten*, also beispielsweise

Austria - Rapid 270 280 210.

Die erste Zahl bezieht sich auf den Ausgang 1, hier also ein Sieg von Austria. Der Wetter erhält ATS 270 für einen Einsatz von ATS 100. Jeder Einsatz von t Schilling gewinnt also einen Betrag von $270t/100$ Schilling, wobei typischerweise nur Vielfache von ATS 50 oder ATS 100 zulässig sind. Analog gilt die Quote 280 für den Ausgang X (Unentschieden) und die Quote 210 für 2 (Sieg Rapid).

Im gegebenen Beispiel ist sofort ersichtlich, dass es sich, wie zu erwarten, um eine unfaire Wette in dem Sinne handelt, dass eine gewinnbringende Strategie unmöglich ist, falls dem Buchmacher die tatsächlichen Spieldausgangswahrscheinlichkeiten bekannt sind und er diese bei der Quotenfestsetzung verwendet. Wir interessieren uns nun für die take-out Rate. Darunter verstehen wir den Anteil der insgesamt gewetteten Summe, welcher von der Gesamtheit der Wetter im Erwartungswert verloren wird, falls den Quoten korrekte Spieldausgangswahrscheinlichkeiten zugrunde liegen.

Gegeben Spieldausgangswahrscheinlichkeiten $pe(y)$ müssen *faire Quoten* $FQ(y)$ folgende Bedingung erfüllen:

$$FQ(y) = 100 \frac{1}{pe(y)} \quad (21)$$

Unter fairen Quoten werden solche verstanden, bei denen die take-out Rate h gleich Null ist. Entsprechend sind *unfaire Quoten* $UQ(y)$ zu der take-out Rate h mit

$$UQ(y) = (1 - h) 100 \frac{1}{pe(y)} \quad (22)$$

⁴Im Fall von Toto gilt $Y = \{1, 2, X\}$, bei Torwette wäre $Y = \{0 : 0, 1 : 0, \dots, + : +\}$. + steht für mehr als 4 Tore.

⁵Torwette: $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

beschrieben. Da y bei der einfachen Fußballwette die Werte 1, X und 2 annehmen kann, liegen uns somit 3 Gleichungen in 4 Unbekannten vor. Allerdings gilt ausserdem

$$\sum_{y \in Y} pe(y) = 1 \quad (23)$$

da es sich bei den $pe(y)$ um Wahrscheinlichkeiten handelt.

Durch Substitution ergibt sich

$$\frac{100(1-h)}{UQ(1)} + \frac{100(1-h)}{UQ(X)} + \frac{100(1-h)}{UQ(2)} = 1 \quad (24)$$

bzw.

$$(1-h) = \left[\frac{100}{UQ(1)} + \frac{100}{UQ(X)} + \frac{100}{UQ(2)} \right]^{-1} \quad (25)$$

sodass sich etwa für obiges Beispiel $(1-h) = 0,831$ ergibt. Über die Beziehungen

$$\frac{100(1-h)}{UQ(y)} = pe(y) \quad (26)$$

ergeben sich Wahrscheinlichkeiten von 0,308 für Sieg Austria, 0,297 für Unentschieden und 0,396 für Sieg Rapid (Summe 1,001 durch Rundungsdifferenz).

Die so ermittelten Wahrscheinlichkeiten werden in unserer Analyse als die tatsächlichen Ausgangswahrscheinlichkeiten der im Totoprogramm gelisteten Fußballspiele verwendet und als *“objektive” Wahrscheinlichkeiten* bezeichnet. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass jede Abweichung der verwendeten von den tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten zu einer Reduktion des erwarteten Profits des Buchmachers führt. Da also ein vitales Interesse an der korrekten Einschätzung der Mannschaftsstärken besteht, kann davon ausgegangen werden, dass die Buchmacher Investitionen in die Informationsbeschaffung tätigen und die verwendeten Wahrscheinlichkeiten somit hinreichend akkurat sind, obwohl trotzdem betont werden muss, dass es sich nicht um objektive Wahrscheinlichkeiten im strengen Sinn handelt.

6 Berechnung und quantitative Analyse optimaler Spielstrategien

Gleichungssystem (11) ist analytisch nicht ohne weiteres lösbar. Die Werte für $q(z)$ müssen daher in jedem einzelnen Fall numerisch approximiert werden.

Die verwendeten Daten sind b (Einsatz pro Tipp), h (Take-out Rate), J_1 (vorgetragener Jackpot oder Sonderaktion im ersten Rang), T (Zahl der abgegebenen Tippiihen) und $p(z)$ (Wahrscheinlichkeitsverteilung). b und h sind im Sample konstant und bedürfen keines weiteren Kommentars. J_1 und T sind ebenso leicht aus den Daten der Gewinnermittlung für jede Runde zu ermitteln. $p(z)$ wird wie im vorherigen Abschnitt beschrieben aus Buchmacherquoten errechnet.

Obwohl die Berechnung von $p(z)$ trivial ist, handelt es sich dennoch für jede Runde um über 500.000 Werte, wir benötigen also aggregierte Maßzahlen zur Kurzbeschreibung. Eine in diesem Zusammenhang besonders wichtige Eigenschaft der Verteilung von $p(z)$ ist ihre *Konzentration*. Die Konzentration eines Merkmalsträgers kann grafisch durch die *Lorenz-Kurve* veranschaulicht werden. Die Lorenz-Kurve wird folgendermaßen konstruiert: Auf der Abszisse werden die einzelnen Tippiöglichkeiten $z \in Z$, aufsteigend nach ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit $p(z)$ geordnet, aufgetragen, wobei die Länge des Diagramms auf 1 normalisiert wird. Auf der Ordinate wird die kumulierte Wahrscheinlichkeit aufgetragen, d.h. ein Punkt (x, y) liegt genau dann auf der Lorenz-Kurve, wenn gilt $y = \sum_{z: p(z) \leq p(x)} p(z)$.

Wegen der Anordnung der Tippiihen auf der x-Achse verläuft die Lorenz-Kurve stets unterhalb der 45-Grad-Geraden. Die Extremfälle sind (i) ein Zusammenfallen mit der 45-Grad-Gerade

(*Gleichverteilung, minimale Konzentration*) und (ii) ein Zusammenfallen mit der x-Achse (*vollständige Ungleichverteilung, maximale Konzentration*).

Konzentrationsmaße sind in unserem Zusammenhang von besonderer Bedeutung, weil wir davon ausgehen können, dass das Ausmaß der Abweichung im Verhalten der Spieler von den Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(z)$ in einem (im relevanten Bereich) positiven Zusammenhang mit der Konzentration des betrachteten Spiels steht. Beispielsweise ist Lotto “6 aus 45” per definitionem ein *minimal konzentriertes Spiel*, da die Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zahlenkombinationen gleich sind. Für diesen Fall wurde schon in Hauser und König (1999) gezeigt, dass die gleichgewichtigen Strategien den Auftrittswahrscheinlichkeiten entsprechen. Ein maximal konzentriertes Spiel ist degeneriert, da genau eine Vorhersage die Wahrscheinlichkeit 1 hätte und alle anderen unmöglich wären. Toto und Torwette liegen zwischen diesen Extremfällen; es gibt Tippreihen die wahrscheinlicher sind als andere, keine weist jedoch eine Wahrscheinlichkeit von Null auf. In Abbildung 6 wird die Lorenzkurve für eine Totorunde dargestellt.

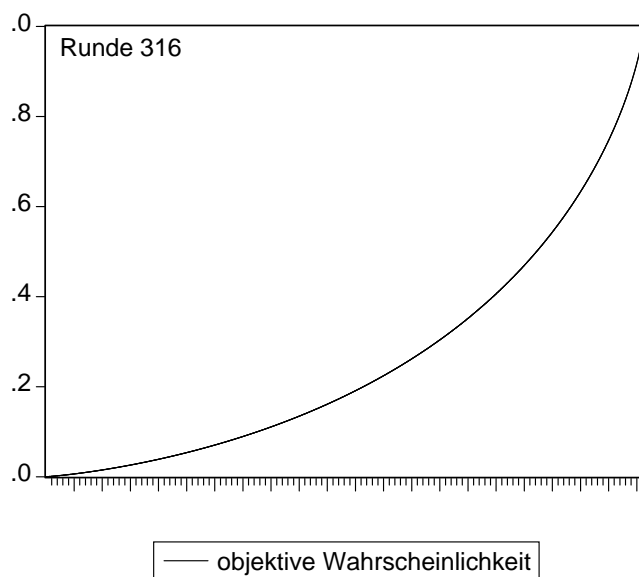


Abbildung 6: Lorenz-Kurve für Toto, Totorunde vom 24.1.1999.

Die Fläche zwischen der 45-Grad-Kurve und der Lorenz-Kurve ist ein Maßstab für das Ausmaß der Konzentration des betrachteten Spiels. Die Fläche unterhalb der Lorenz-Kurve läßt sich mit

$$F_- = \frac{1}{\#Z} \left(\frac{k(0) + k(1)}{2} + \frac{k(1) + k(2)}{2} + \dots + \frac{k(\#Z - 1) + k(\#Z)}{2} \right) = \frac{1}{\#Z} \left(\sum_{z=1}^{\#Z} k(z) - \frac{1}{2} \right) \quad (27)$$

berechnen, wobei $k(x) = \sum_{z:p(z) \leq p(x)} p(z)$ die kumulierte Wahrscheinlichkeit bis Tippreihe x angibt ($k(0)$ wird als Null definiert; $k(\#Z) = 1$). Die Fläche zwischen der 45-Grad-Kurve und Lorenz-Kurve ist dann

$$F_+ = \frac{1}{2} - F_- \quad (28)$$

Wenn wir diese Maßzahl so normieren, dass für maximale Konzentration der Wert 1 und für minimale Konzentration der Wert 0 angenommen wird, erhalten wir das *Konzentrationsmaß nach*

Lorenz-Münzner κ_p :

$$\kappa_p = F_+ \frac{2\#Z}{\#Z - 1} \quad (29)$$

Diese Werte sind in Abbildung 7 für die untersuchten Totorunden zusammengestellt:

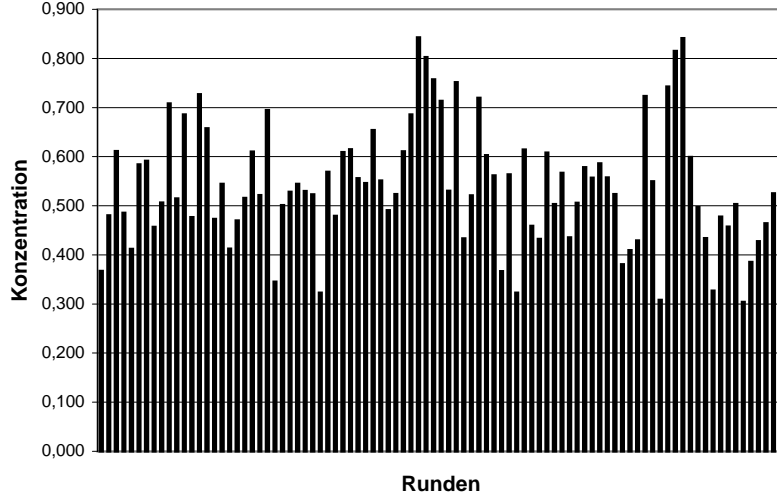


Abbildung 7: Lorenz-Münzner Konzentrationsmaße für diverse Totorunden.

Wir erkennen, dass Toto keineswegs eine Ausspielung mit konstanter Konzentration ist. Zwar ist davon auszugehen, dass sich der Veranstalter bemüht, Spiele, deren Ausgänge möglichst gleiche Wahrscheinlichkeiten aufweisen, ins Programm aufzunehmen,⁶ jedoch gelingt dies offenbar nicht immer im gleichen Ausmaß. Dies ist auf zwei Ursachen zurückzuführen: Erstens kommt es gelegentlich zu einem saisonal bedingten Mangel an Fußballspielen, wobei vor allem die Sommerpause in den in- und ausländischen Ligen zu erwähnen ist. Die beiden Spitzen in obiger Grafik (7.7.1996 und zwei weitere Juliwochen 1996 sowie 13.7.1997 und weitere aus Juli 1997) mit Konzentrationswerten von mehr als 0,8 stammen aus Runden in denen ausschließlich “Intertoto”-Spiele das Programm bildeten. Aufgrund des relativen Mangels wurden hier selbst Paarungen aufgenommen, in denen ein Spielausgang eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% aufwies (Buchmacherquote 110 für 100). Zweitens ist offenbar die Bereitschaft vorhanden, auch Spiele von Mannschaften ungleicher Stärke aufzunehmen, falls diese Begegnungen besonders attraktiv erscheinen (z.B. österreichische Bundesliga). Ausgeglichene Spielprogramme kommen vor allem in Zeiten vor, in denen in Österreich kein Fußball gespielt wird, im Ausland aber ein ausreichendes Angebot besteht.

Ausgehend von $p(z)$ und den restlichen Daten berechnen wir die optimalen Gewichte $q(z)$ durch numerische Approximation. Das Hauptproblem bei der Auflösung des Gleichungssystems (11-13) liegt darin, dass die unbekannten $q(z)$ auch in den Exponenten, d.h. in den Ausdrücken $e^{-q(z)T}$ auftreten. Wir führen daher Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\tilde{q}_i(z)$ ein, wobei $\tilde{q}_0(z) \equiv p(z)$ für alle z . Bei Iterationsschritt i ist nun folgendes Gleichungssystem zu betrachten ($\forall z, z' \in Z$):

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{\tilde{q}_i(z)} \left(b(1-h) + \frac{J_1}{T} \right) - \frac{p(z)}{\tilde{q}_i(z)} \left(b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right) e^{-\tilde{q}_{i-1}(z)T} = \\ \frac{p(z')}{\tilde{q}_i(z')} \left(b(1-h) + \frac{J_1}{T} \right) - \frac{p(z')}{\tilde{q}_i(z')} \left(b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right) e^{-\tilde{q}_{i-1}(z')T} \end{aligned} \quad (30)$$

Wir fixieren ein $z^* \in Z$ und erhalten

$$\tilde{q}_i(z^*)^{-1} f(\tilde{q}_{i-1}(z^*)) = \tilde{q}_i(z)^{-1} f(\tilde{q}_{i-1}(z)) \quad \forall z \quad (31)$$

⁶Man beobachtet etwa, dass Spiele des Tabellenersten gegen den Tabellenletzten allenfalls dann Aufnahme ins Totoprogramm finden, wenn die vermeintlich stärkere Mannschaft auswärts antritt.

wobei

$$f(\tilde{q}_{i-1}(z)) = p(z) \left[\left(b(1-h) + \frac{J_1}{T} \right) - \left(b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right) e^{-\tilde{q}_{i-1}(z)T} \right] \quad (32)$$

Bei jedem Iterationsschritt i ist $\tilde{q}_{i-1}(z)$ bereits bekannt und wir können somit “relative” Wahrscheinlichkeiten ermitteln. Unter Ausnutzung von $\sum_{z \in Z} \tilde{q}_{i-1}(z) = 1$ erhalten wir die Vorschrift für die Iteration

$$\tilde{q}_i(z) = \frac{\frac{f(\tilde{q}_{i-1}(z))}{f(\tilde{q}_{i-1}(z^*))}}{\sum_{z \in Z} \frac{f(\tilde{q}_{i-1}(z))}{f(\tilde{q}_{i-1}(z^*))}} \quad (33)$$

Es sollte nun gelten

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{q}_i(z) \rightarrow q(z) \quad (34)$$

und in der Tat konvergiert der Prozess für die betrachteten Fälle relativ rasch (< 20 Iterationen), was durch Vergleich der Werte von $u(z)$ sofort überprüfbar ist.

Die resultierende *optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung* $q(z)$ kann analog zu $p(z)$ veranschaulicht und mit dieser verglichen werden.

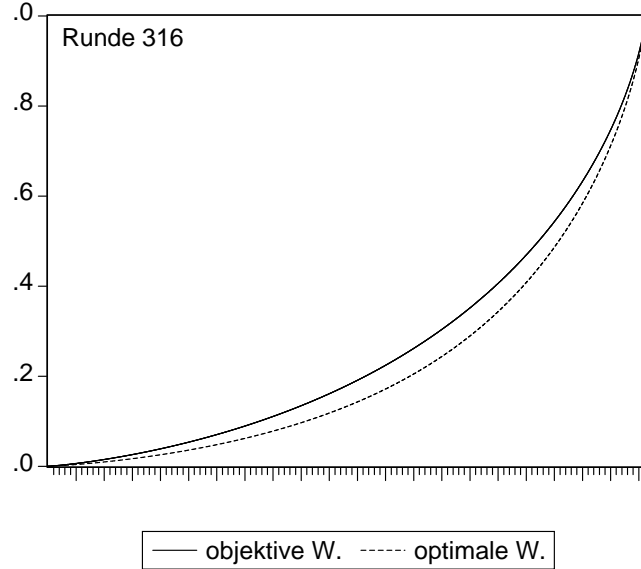


Abbildung 8: Lorenz-Kurven der objektiven und optimalen Wahrscheinlichkeiten, Totorunde vom 24.1.1999.

In Abbildung 8 erkennen wir deutlich den Effekt des rationalen Überwettens der Favoriten. Tippreihen mit geringer Auftrittswahrscheinlichkeit sollten von den Spielern untergewichtet werden. Man beachte, dass die gleichzeitige Darstellung in einem Diagramm kein Problem darstellt, weil durch Satz 1 der Erhalt der Ordnung (Reihenfolge der Tippreihen auf der x-Achse) sichergestellt ist.

Um zu zeigen, dass rationales Überwetten nicht auf diese eine Runde beschränkt ist, berechnen wir für jede Runde das Lorenz-Münzner Konzentrationsmaß bezüglich $q(z)$ (welches als κ_q bezeichnet wird) und vergleichen es mit dem entsprechenden κ_p (Abbildung 9).

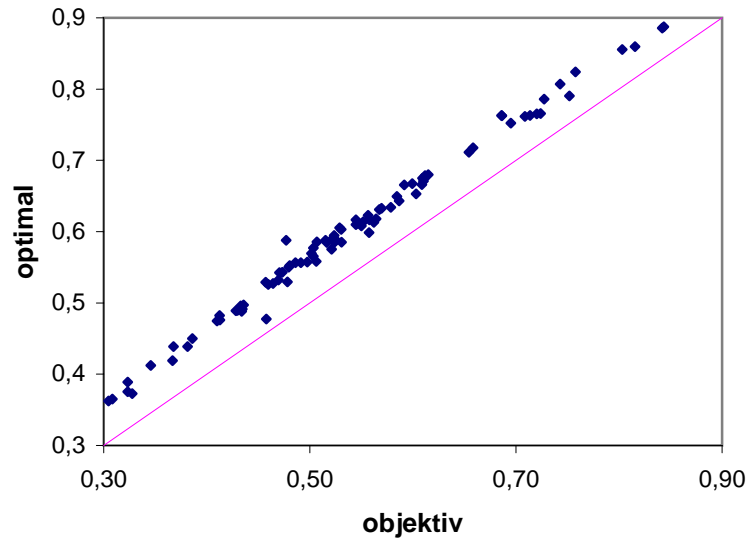


Abbildung 9: Beziehung zwischen κ_q (optimal) und κ_p (objektiv) (93 Totorunden).

Wiederum sehen wir, dass κ_q in jeder Runde höher als κ_p war, d.h. die Konzentration der q -Verteilung ist höher als die der p -Verteilung. Wie der relativ konstante Abstand zur 45-Grad-Kurve zeigt, ist die Differenz der beiden Werte nahezu unabhängig von κ_p . Das wiederum impliziert, dass diese Differenz, gemessen in Prozent der Restfläche ($\frac{100(\kappa_q - \kappa_p)}{1 - \kappa_p}$) mit der Konzentration der betrachteten Runde steigt. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 10 dargestellt.

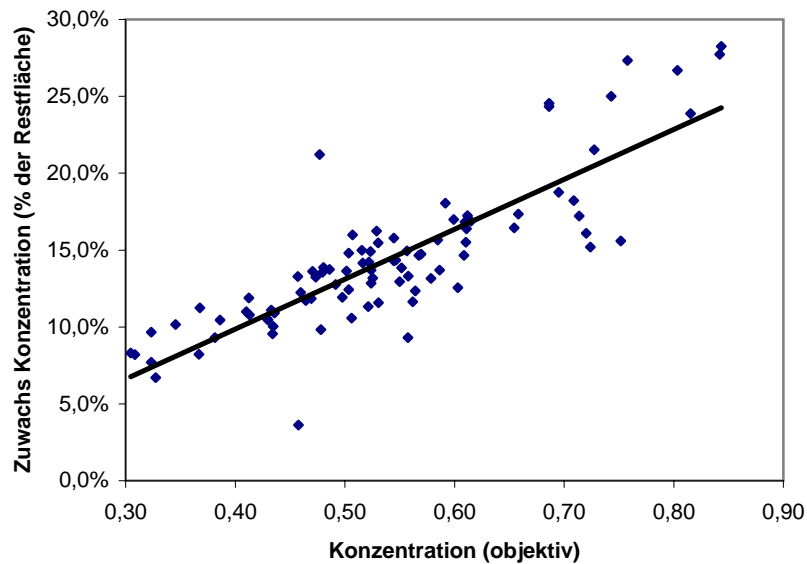


Abbildung 10: Höhere Konzentration bewirkt relativ stärkeres Favoriten-Überwetten.

Der Grund für die Abweichungen von der Trendlinie liegt darin, dass das Ausmaß des Überwettens auch von anderen rundenspezifischen Faktoren abhängt, insbesondere von der Zahl der

abgegebenen Tipps. Je größer der Pool wird, desto geringer wird auch die Jackpotgefahr, und daher kommt es zu einer rationalen Überbetonung von Tippreihen mit hoher Wahrscheinlichkeit. So lag die relative Differenz in der Runde vom 17. März 1996 lediglich bei 3,6%, während bei anderen ähnlich konzentrierten Runden 10% typisch sind. Dafür war ein Doppeljackpot verantwortlich, der zu einer unüblich hohen Zahl von abgegebenen Tipps führte.

In einer alternativen Darstellung wird der Unterschied zwischen $p(z)$ und $q(z)$ noch klarer. In Abbildung 11 wird $q(z)/p(z)$ gegen das aufsteigend nach Wahrscheinlichkeiten geordnete z abgetragen.

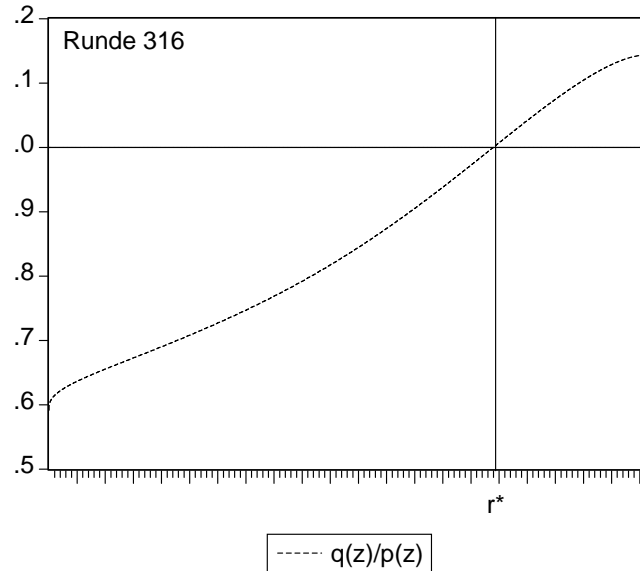


Abbildung 11: Verhältnis $q(z)/p(z)$, geordnet nach Auftrittswahrscheinlichkeiten, Totorunde vom 24.1.1999.

Alle Tippreihen, welche mit geringerer Wahrscheinlichkeit auftreten als r^* , werden untergewichtet. Die unwahrscheinlichsten Tippreihen werden im Gleichgewicht nur etwas mehr als halb so oft gespielt, wie dies aufgrund ihrer objektiven Wahrscheinlichkeit erwartet werden könnte. Dagegen werden im Gleichgewicht die wahrscheinlichsten Tippreihen um mehr als 30% häufiger gespielt.

7 Spezielle Probleme in der Torwette

Wir wollen die Torwette nach denselben Prinzipien wie Toto abhandeln, stoßen dabei jedoch auf eine Reihe von Problemen. Diese umfassen im wesentlichen:

1. Jackpots im zweiten Rang sind möglich. Während im Toto ein Jackpot im Elferrang oder gar im Zehnerrang eher eine theoretische Möglichkeit ist, treten in der Torwette Jackpots im zweiten Rang (3 richtige Spiele) häufiger auf - in insgesamt 516 Runden von 1989 bis 1999 23 mal (4,2%). Da die Beteiligung an der Torwette eine sinkende Tendenz aufweist, steigt auch hier die Bedeutung der Jackpots. Es erscheint daher erforderlich, den Jackpotgefahr-Faktor in der Payoff-Funktion auch im zweiten Rang zu erhalten.
2. Behandlung des Hattricks⁷; Notwendigkeit der Abgabe zumindest eines Tototipps als Teilnahmevoraussetzung.
3. Ermittlung der Auftrittswahrscheinlichkeiten $p(z)$.
4. Randlösungen bei der Ermittlung der optimalen $q(z)$.

⁷Die Problematik des Hattricks wird in Hauser et al. 2000 genauer untersucht.

7.1 Ermittlung der Auftrittswahrscheinlichkeiten

Im Fall von Toto wurden Buchmacherquoten zur Ermittlung der "objektiven" Eintrittswahrscheinlichkeiten von Tippreihen herangezogen. Um dies auch bei der Torwette durchführen zu können, würden entsprechende Quoten für Wetten auf exakte Resultate bei Fußballspielen benötigt. Bedauerlicherweise liegen uns derartige Daten nicht vor. Wir verfügen lediglich über einige wenige Quotentabellen für Resultatswetten, auf die wir uns jedoch nicht verlassen wollen. Wir haben daher die empirischen Häufigkeiten des Auftretens bestimmter Resultate betrachtet. Diese werden für insgesamt 2.378 Fußballspiele in der folgenden Tabelle 1 dargestellt.⁸ Dabei werden, entsprechend der Vorgangsweise in der Gewinnermittlung der Torwette, alle Resultate mit fünf oder mehr Toren für eine Mannschaft zusammengefasst.

Man könnte die in Tabelle 1 aufgelisteten relativen Häufigkeiten zur Berechnung von Auftrittswahrscheinlichkeiten bestimmter Torwette-Tippreihen verwenden. Es wäre dann z.B. die Wahrscheinlichkeit der Reihe 1:2, 0:0, 1:0, 2:0 gleich $0,0526 \cdot 0,0955 \cdot 0,0908 \cdot 0,0744 = 0,000034$, d.h. etwa 1:30.000.

Es wäre allerdings naiv anzunehmen, dass die Ausgangswahrscheinlichkeiten nicht von den involvierten Mannschaften abhängig sind. So tritt etwa das Resultat "2:0" in etwa so häufig auf wie das Resultat "0:1". Trotzdem wird ersteres Ergebnis vermutlich deutlich wahrscheinlicher sein, wenn der Tabellenführer daheim gegen den Tabellenletzten antritt. Um das Problem zu vereinfachen, treffen wir folgende plausible Annahme (sei d die *Tordifferenz*, d.h. die Tore von Mannschaft 1 abzüglich der Tore, welche Mannschaft 2 erzielt; Resultate mit "+" Toren werden wie 5 Tore behandelt):

Annahme 3. *Man betrachte ein beliebiges Spiel, welches mit einer Tordifferenz von $d \in [-5, -4, \dots, 5]$ endet. Dann sei die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Mannschaft 1 $x \in [0, 1, \dots, 5]$ Tore erzielt, unabhängig von den beteiligten Mannschaften bzw. deren Spielstärken.*

Es erscheint plausibel, dass, gegeben ein Spiel endet etwa mit einer Tordifferenz von +2, die Wahrscheinlichkeiten der dann möglichen Resultate 2:0, 3:1, 4:2 oder +:3 nicht von den ex-ante gegebenen Spielstärken, wie sie u.a. durch die Quoten bei den Buchmachern zum Ausdruck kommen, abhängen. Mit dieser Annahme können für alle unentschiedenen Resultate (0:0, 1:1, 2:2, 3:3, 4:4 und +: +), also Resultate mit einer Tordifferenz von Null, unbedingte Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden. Dabei werden die Häufigkeiten aus Tabelle 1 zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten herangezogen. Multiplikation mit der zuvor ermittelten Wahrscheinlichkeit eines unentschiedenen Spielausgangs liefert die entsprechende objektive Wahrscheinlichkeit.

Annahme 3 genügt allerdings nicht, um diese Prozedur auch für nicht unentschiedene Spiele durchführen zu können, da die Zufallsvariable "Tordifferenz" nicht von der Spielstärke der beteiligten Mannschaften unabhängig zu sein braucht. Man würde erwarten, dass ein hoher Sieg, etwa 3:0 oder 4:0, umso häufiger eintritt, je höher die Einschätzung der siegenden Mannschaft war (bzw. je niedriger die Quote für einen Heimsieg war).

Wir haben daher den Zusammenhang zwischen der (aus den Buchmacherquoten berechneten) Erfolgswahrscheinlichkeit einer Mannschaft mit der erzielten Tordifferenz untersucht. Betrachtet wurden 419 Spiele, welche (i) im Torwetteprogramm enthalten waren, (ii) für die Buchmacherquoten vorlagen und (iii) die nicht unentschieden endeten.⁹ Sei p_i die ex-ante Erfolgswahrscheinlichkeit der Mannschaft, welche Spiel i für sich entschieden hat (es wird dabei kein Unterschied gemacht, ob es sich um einen Heim- oder Auswärtssieg gehandelt hat). d_i ist die Tordifferenz im Absolutbetrag. Die simple lineare Regression

$$d_i = a + bp_i + u_i \quad (35)$$

führt zu einem Schätzer $\hat{b} = 0,666$ mit einem Standardfehler von 0,304. Der positive Zusammenhang zwischen der ex-ante Erfolgswahrscheinlichkeit und der erzielten Tordifferenz liegt damit an

⁸Die Spiele stammen aus den ersten 595 Torwette-Runden von 1988-1999, wobei zwei Resultate eliminiert wurden, da sie als Ersatztipps gekennzeichnet waren.

⁹Diese Spiele ereigneten sich im Zeitraum 1996-1999.

Resultat	abs. Häufigkeit	relative Häufigkeit in %
1:1	288	12,11
0:0	227	9,55
1:0	216	9,08
2:0	177	7,44
2:1	173	7,28
0:1	169	7,11
3:1	128	5,38
1:2	125	5,26
3:0	119	5,00
2:2	112	4,71
0:2	110	4,63
1:3	72	3,03
0:3	62	2,61
3:2	50	2,10
4:0	45	1,89
2:3	40	1,68
4:1	38	1,60
+:0	33	1,39
4:2	29	1,22
0:4	24	1,01
+:1	20	0,84
1:4	19	0,80
3:3	16	0,67
2:4	16	0,67
+:2	14	0,59
1:+	13	0,55
2:+	12	0,50
0:+	8	0,34
4:3	7	0,29
4:4	4	0,17
+:3	4	0,17
3:+	3	0,13
3:4	3	0,13
+:4	1	0,04
4:+	1	0,04
+:+	0	0,00
Summe	2378	100,01

Tabelle 1: Häufigkeiten von Fußballresultaten, 1988-1999.

Quelle: Österreichische Lotterien, <http://www.lottery.co.at/index.html>.

der Grenze zur Insignifikanz. Bei dieser Regression ergab sich ein R^2 von nur 0,011. Wir schließen, dass, obwohl möglicherweise ein positiver Zusammenhang besteht, dieser nur sehr schwach ausgeprägt ist. Die Einschätzung der relativen Stärke von Fußballmannschaften scheint also im wesentlichen nur die Wahrscheinlichkeit von Sieg, Niederlage oder Unentschieden zu beeinflussen, viel weniger jedoch die *Höhe des Sieges*.

Aufgrund dieses Resultates werden wir auch die Tordifferenz als unabhängig von den Ausgangswahrscheinlichkeiten betrachten. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines beliebigen präzisen Resultats zu ermitteln, brauchen wir dann im Rahmen dieses Modells nur noch die früher ermittelten, "groben" Ausgangswahrscheinlichkeiten $pe(1)$, $pe(2)$ bzw. $pe(X)$ mit dem entsprechenden Eintrag in der folgenden Tabelle bedingter Wahrscheinlichkeiten, welche aus Tabelle 1 berechnet wurde, multiplizieren.

Resultat(1)	bed.W.	Resultat(X)	bed.W.	Resultat(2)	bed.W.
1:0	0,2049336	0:0	0,3508501	0:1	0,2496307
2:0	0,1679317	1:1	0,4451314	0:2	0,1624815
2:1	0,1641366	2:2	0,1731066	1:2	0,1846381
3:0	0,1129032	3:3	0,0247295	0:3	0,0915805
3:1	0,1214421	4:4	0,0061824	1:3	0,1063516
3:2	0,0474383	5:5	0	2:3	0,0590842
4:0	0,0426945			0:4	0,0354505
4:1	0,0360531			1:4	0,028065
4:2	0,0275142			2:4	0,0236337
4:3	0,0066414			3:4	0,0044313
5:0	0,0313093			0:5	0,0118168
5:1	0,0189753			1:5	0,0192024
5:2	0,0132827			2:5	0,0177253
5:3	0,0037951			3:5	0,0044313
5:4	0,0009488			4:5	0,0014771

Tabelle 2: Relative Häufigkeiten, bedingt auf den Spielausgang.

Gegeben ein bestimmter Spielausgang (wie 1, 2 oder X), wird die bedingte Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Resultats (wie 3:0, 1:2 oder 0:0) als unabhängig von der betrachteten Paarung und als vorgegeben durch die Werte in Tabelle 2 gesehen.

7.2 Optimale Spielstrategien für die Torwette

Mit den obigen Einschränkungen können wir analog zum Toto die objektiven und optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Torwette berechnen. Die Payoff-Funktion ist, analog zu Gleichung (6):

$$u^i(z) = \left[\frac{p(z)}{q(z)} (1 - e^{-q(z)T}) \right] \left[b(1-h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right] + \left[\frac{p(Z_{-1})}{q(Z_{-1})} (1 - e^{-q(Z_{-1})T}) \right] \left[b(1-h)s_2 + \frac{J_2}{T} \right] \quad (36)$$

wobei: $b = 10,8$, $h = 0,563$, $s_1 = 0,666$, $s_2 = 0,333$.

z ist eine generische Torwette-Tippreihe, und $Z_{-1} \subset Z$ die Menge aller Tippereien, bei denen im Vergleich zu z ein Spiel "falsch" ist. Da wir hier Jackpots im 2. Rang zu berücksichtigen haben, genügt Annahme 2 nicht mehr zur Eliminierung aller Terme, die Z_{-1} enthalten. Wir benötigen daher eine sinnvolle Annäherung für $p(Z_{-1})$ bzw. $q(Z_{-1})$. Es gilt hier $\#Z_{-1} = 135$, sodass man versucht ist, $q(Z_{-1}) = 135q(z)$ zu setzen. Die dahinterstehende Annahme wäre, dass alle "ähnlichen" Tippereien (mit einem unterschiedlichen Tipp) im Durchschnitt dieselbe Wahrscheinlichkeit

aufweisen wie die Tippreihe selbst. Dies ist jedoch für den Fall der Torwette ungenügend. Es ist offensichtlich, dass die "Nachbarn" einer unwahrscheinlichen Tippreihe wie (+:+, +:4, 3:+, 4:4) eine höhere Eintrittswahrscheinlichkeit aufweisen als die ursprüngliche Reihe, während es für von Haus aus wahrscheinliche Reihen gerade umgekehrt ist.¹⁰ Jede Eintrittswahrscheinlichkeit $p(z)$ ergibt sich über die Multiplikationsregel für unabhängige Ereignisse als Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Elementarziehungen (d.h. der Programmspiele):

$$p(z) = pe(z_1)pe(z_2)pe(z_3)pe(z_4) \quad (37)$$

Die Wahrscheinlichkeit $p(Z_{-1})$ ist entsprechend

$$\begin{aligned} p(Z_{-1}) = & (1 - pe(z_1))pe(z_2)pe(z_3)pe(z_4) + pe(z_1)(1 - pe(z_2))pe(z_3)pe(z_4) + \\ & pe(z_1)pe(z_2)(1 - pe(z_3))pe(z_4) + pe(z_1)pe(z_2)pe(z_3)(1 - pe(z_4)) \end{aligned} \quad (38)$$

bzw.

$$p(Z_{-1}) = p(z) \left(\frac{1}{pe(z_1)} + \frac{1}{pe(z_2)} + \frac{1}{pe(z_3)} + \frac{1}{pe(z_4)} \right) \quad (39)$$

Wenn wir annehmen würden, dass die Elementarwahrscheinlichkeiten alle gleich sind, erhielten wir

$$p(Z_{-1}) = 4p(z) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{p(z)}} - 1 \right) \quad (40)$$

In der Tat, wenn wir das Minimierungsproblem

$$\min \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \quad (41)$$

unter der Nebenbedingung

$$abcd = A$$

betrachten, ergibt sich aus den Lagrange Bedingungen

$$a = b = c = d = \frac{1}{\lambda A} \quad (42)$$

Daher stellt Gleichung (40) eine *untere Schranke* für $p(Z_{-1})$ dar. Da andere Methoden ein explizites Einbeziehen der Werte für $pe(z_m)$ bedingen würden, werden wir diese untere Schranke jedoch als Näherung verwenden. Wir behalten die Konsequenzen einer möglichen Unterschätzung von $p(Z_{-1})$ im Auge:

1. Die Jackpotgefahr im 2. Rang könnte zu hoch eingeschätzt werden, wodurch wiederum das Phänomen des *Überwettens des Favoriten* zu stark betont wird.
2. Der berechnete *erwartete Payoff* könnte niedriger sein als der tatsächliche.

Unter gleichzeitiger Anwendung von Annahme 2 erhalten wir

$$\begin{aligned} u^i(z) = & \left[\frac{p(z)}{q(z)} (1 - e^{-q(z)T}) \right] \left[b(1 - h)s_1 + \frac{J_1}{T} \right] + \\ & \left[\frac{p(z)}{q(z)} (1 - e^{-4q(z) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{q(z)}} - 1 \right) T}) \right] \left[b(1 - h)s_2 + \frac{J_2}{T} \right] \end{aligned} \quad (43)$$

Ab hier kann nun analog zum Toto verfahren werden. Bei der Torwette wird jedoch die Problematik von *Randlösungen* bei der optimalen Strategiewahl relevant. Mit unserer Methodik sind nur innere

¹⁰Dies gilt auch im Toto, wo aber durch die höhere Zahl der Elementarziehungen (12 gegenüber 4) dieser Unterschied nicht so deutlich ist.

Lösungen in dem Sinn, dass $q(z) > 0$ für alle z , ermittelbar. In der Torwette zeigt sich jedoch, dass ein Großteil der möglichen Reihen optimalerweise ein Gewicht von Null erhalten sollte. Dies hat (z.B. im Fall von Toto) so lange keine Rolle gespielt, wie derartige Reihen *relativ zu anderen Reihen* hinreichend unwahrscheinlich waren. In diesem Fall würde das ermittelte $q(z)$ mit unserer iterativen Methode vernachlässigbar klein werden. Im Fall der Torwette wird es zwar *absolut* auch klein, nicht jedoch im Vergleich zu anderen Reihen. Daher tritt ein systemimmanenter Fehler auf, der sich am besten durch ein Beispiel illustrieren lässt: für eine bestimmte Torwette-Reihe z wird ein $q(z)$ ermittelt. Gegeben dieses $q(z)$, lässt sich die erwartete Zahl der Tipper dieser Reihe im Nash-Gleichgewicht mit $q(z) \cdot T$ berechnen. Es wird nun bei *mindestens* 97% der verfügbaren 1 679 616 Reihen der Fall eintreten, dass $q(z)T < 1$. Damit würde der Beitrag des 1. Ranges dieser Reihe mit $p(z) \frac{b(1-h)s_1T+J_1}{q(z)T}$ berechnet. Ein Teiler, welcher kleiner als 1 ist, macht aber keinen Sinn.

Dieses Problem ist nicht nur methodologischer Natur. Ein Totalisatorspiel, bei der eine derart große Zahl von Tippmöglichkeiten dominiert wird (d.h. viele Reihen erscheinen nicht einmal dann wert gespielt zu werden, wenn bekannt ist, dass sie von *niemand* sonst getippt werden), ist degeneriert und seiner Attraktivität beraubt. Zur Veranschaulichung sei an das Farbenspiel zu Beginn erinnert. Wir haben gesehen, dass, wenn mehr als $2/3$ der Kugeln in der Urne von derselben Farbe sind, die Prognose dieser Farbe zur dominanten Strategie wird. Im Gleichgewicht würden *beide* Teilnehmer diese Farbe vorhersagen. Wird sie gezogen, erhalten beide genau ihren Einsatz zurück, wird sie nicht gezogen, ergibt sich ein Jackpot und der Einsatz ist für beide verloren.

Gegeben die enorme Zahl der Tippmöglichkeiten und den vergleichsweise sehr kleinen Pool, erinnert die Torwette an ein solches Spiel. Die TeilnehmerInnen sind de facto zur Auswahl einer der ganz wenigen Tippereien gezwungen, deren objektive Wahrscheinlichkeit im Vergleich zum kleinen Pool hinreichend groß ist.

Wir haben die Konzentrationsmaße κ_p und κ_q für einige ausgewählte Runden berechnet:

Datum	κ_p	κ_q
6.12.1998	0,926	0,988
11.1.1998	0,924	0,983
17.8.1997	0,927	0,977
8.12.1996	0,928	0,983

Tabelle 3: Vergleich der Konzentrationsmaße für ausgewählte Torwetterunden.

Die Resultate sprechen für sich. Das Spiel ist an sich schon extrem konzentriert ($\kappa_p > 0,9$). Die geringe Beteiligung führt dann zu einem κ_q , welches 1 bereits sehr nahe kommt. Trotz des kleinen Fehlers, welche eine eventuelle Untergewichtung des 2. Ranges mit sich bringt, dürfte das wahre κ_q , bei dem die Möglichkeit einer Randlösung berücksichtigt wird, sogar noch höher liegen.

8 Empirische Strategiewahl von Toto- und TorwettespielerInnen im Vergleich zum theoretischen Modell

Nach der Bestimmung der optimalen Spielstrategien, widmen wir uns hier der Frage, wie sich das tatsächliche Verhalten der SpielerInnen auf aggregierter Ebene darstellt. Zu diesem Zweck kann für jede Tippreihe z aus den Daten ermittelt werden, wie häufig sie getippt wurde. Die sich aus der Division durch die Gesamtzahl der abgegebenen Tipps T ergebende relative Häufigkeit $r(z)$ ist, angenommen die Modellvorstellung ist richtig, im Erwartungswert gleich der individuellen Wahrscheinlichkeit jedes Spielers, Tippreihe z tatsächlich anzukreuzen. Damit soll ein Vergleich auf der Ebene des aggregierten Konzentrationsmaßes für möglichst viele Runden durchgeführt werden.

Es ist nun möglich, eine Lorenz-Kurve sowie ein Konzentrationsmaß κ_r in derselben Weise wie wir es für p bzw. q getan haben, herzuleiten. Wir müssen allerdings beachten, dass die Reihenfolge der Tipps, wenn nach der "*empirischen Wahrscheinlichkeit*" $r(z)$ sortiert wird, nicht notwendiger-

weise dieselbe sein wird, wie wenn nach *objektiven Wahrscheinlichkeiten* $p(z)$ sortiert wird.¹¹ Aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit wollen wir die Sortierung nach den objektiven Wahrscheinlichkeiten beibehalten. Dies hat lediglich die Konsequenz, dass κ_r nicht im eigentlichen Sinne als Konzentrationsmaß interpretierbar ist. In der folgenden Grafik werden die Lorenz-Kurven von $p(z)$ (“objektive” Wahrscheinlichkeit), $q(z)$ (optimale Wahrscheinlichkeit) und die Pseudo-Lorenz-Kurve für $r(z)$ (empirische Wahrscheinlichkeit) für die Totorunde vom 22.11.1998 dargestellt.

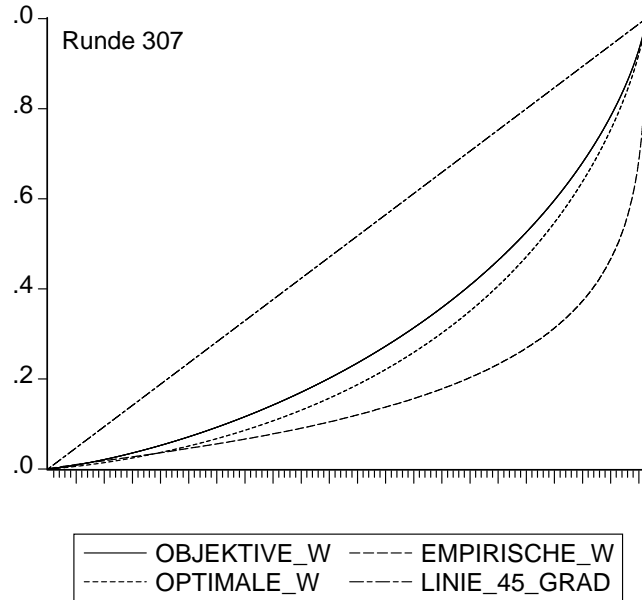


Abbildung 12: Lorenz-Kurven der objektiven, optimalen und empirischen Wahrscheinlichkeiten, Totorunde vom 22.11.1998.

Wir stellen fest, dass die Kurve für $r(z)$ (jene Kurve, die am weitesten rechts verläuft) die übliche Form hat. Theoretisch wäre aufgrund der Änderung in der Reihenfolge ein anderer Verlauf (etwa teilweise oberhalb der 45-Grad-Kurve oder in Schlangenlinien) möglich. Wir schließen daraus, dass die Reihenfolge der Tippreihen auf der x-Achse sich nicht in erheblichem Ausmass geändert hat.¹² Interessant ist weiterhin der Vergleich zwischen den Kurven von $q(z)$ und $r(z)$. Im konkreten Fall (Totorunde vom 22.11.1998) zeigt sich, dass das Überwetten der Favoritentippreihen *sogar noch stärker ausgeprägt* ist als vom Modell vorhergesagt. Wir erhalten für diese Runde $\kappa_p = 0.481$, $\kappa_q = 0.553$ und $\kappa_r = 0.718$. Dieser Vergleich läßt sich für alle untersuchten Totorunden durchführen. Die folgende Grafik (Abbildung 13) verdeutlicht, dass der Vergleich zwischen κ_q und κ_r häufig in dieser Weise ausfällt. Obwohl ein klarer Zusammenhang zwischen optimaler Konzentration und beobachteter Konzentration zu ersehen ist, kommt es (wie nicht anders zu erwarten war) in zahlreichen Runden zu Abweichungen. In sehr vielen Runden werden die Favoriten noch stärker übergewichtet als erwartet. Wir dehnen den Vergleich noch auf κ_p aus:

	κ_p	κ_q	κ_r
κ_p	—	90	85
κ_q	0	—	83
κ_r	5	7	—

Tabelle 4: Vergleich der drei Konzentrationsmaße - Überblick

¹¹Dagegen war der Übergang von p auf q wegen Satz 1 in dieser Hinsicht unproblematisch.

¹²Dies bestätigt sich in allen Runden.

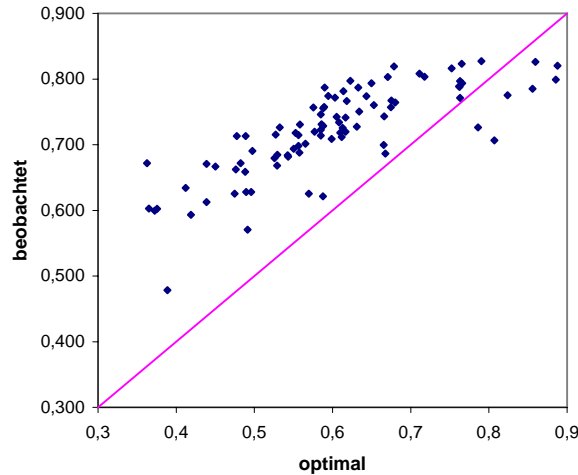


Abbildung 13: Optimale Konzentration (κ_q) versus beobachtete Werte in 90 Totorunden.

Hier entspricht jeder Wert in der Matrix der Zahl der Runden (von insgesamt 90) in denen die Zeilenvariable kleiner war als die Spaltenvariable. Dass κ_p stets kleiner ist als κ_q ist mit Satz 2 bewiesen. Interessanter ist der Vergleich mit den empirisch gewonnenen Werten κ_r . In 7 von 90 Fällen ist $\kappa_r < \kappa_q$, das heißt, die Favoriten wurden in diesen Runden nicht in dem vom Modell prognostizierten Ausmaß überwettet. In nur 5 Runden galt außerdem $\kappa_r < \kappa_p$, also wurden in diesen Wochen sogar die Außenseiter übergewichtet. In der Mehrzahl der Runden (85 von 90 Runden) kam es allerdings zu der schon oben besprochenen Situation, dass die favorisierten Tippreihen sogar noch stärker überwettet wurden als dies für die Gleichgewichtslösung des Modells vorhergesagt wurde.

Die Ausnahmeerscheinung, dass Favoritentippreihen nicht übergewichtet oder sogar gegenüber den „objektiven“ Wahrscheinlichkeiten untergewichtet werden, kann man nur in Runden beobachten, in denen die objektive Konzentration an sich schon hoch ist. Dies deutet darauf hin, dass es einen gewissen Anteil an TeilnehmerInnen gibt, welche ihre Tipps nach einer gemischten Strategie mit gleichen Wahrscheinlichkeiten wählen (reine Zufallsauswahl).¹³ Zwar gibt es deutlich mehr SpielerInnen, welche Favoriten wählen, gibt es jedoch sehr klare Favoriten in den Programmspielen, genügt der kleine Anteil an Zufallsspielern, sodass im Aggregat die wahrscheinlichsten Tippreihen nicht im angemessenen Umfang berücksichtigt werden.

Äußerst bemerkenswert ist überdies die starke Saisonalität im Auftreten des seltenen Falles $\kappa_r < \kappa_p$. Nur in 8 der 90 untersuchten Runden bestand das Spielprogramm ganz oder überwiegend aus Spielen des Intertoto(UI)-Cups.¹⁴ In 7 dieser 8 Runden tritt $\kappa_r < \kappa_q$ auf, in 5 sogar $\kappa_r < \kappa_p$. Es gibt also *keine* Nicht-Intertoto-Runde, in der Favoriten untergewichtet wurden. Andererseits gibt es nur eine einzige ausgewertete Runde (20.7.97), welche hauptsächlich aus Intertoto-Spielen bestand, und trotzdem $\kappa_r > \kappa_q$ aufwies. Diese Beobachtung konnte man in allen drei Jahren, 1996, 1997 und 1998 machen. Neben der bereits angemerkten hohen Konzentration gerade in Intertoto-Runden, können noch zwei weitere Umstände für dieses Phänomen verantwortlich sein. Erstens sind die Mannschaften, welche den UI-Cup bestreiten (mit Ausnahme der beteiligten heimischen Mannschaften) dem Spieler weitgehend unbekannt. Auch ist es wesentlich leichter, Ligaspiele aufgrund der Tabellsituation einzuschätzen, als etwa eine Begegnung des slowakischen Tabellendritten und des belgischen Tabellensechsten. Dieser Umstand führt nicht nur zum (durch Sonderaktionen nur teilweise abgemilderten) Umsatzrückgang in diesen Runden, sondern offenbar auch zu einer höheren Bereitschaft zu Außenseitertipps beim verbliebenen Publikum. Zweitens könnte sich dieses „Som-

¹³Zu vermuten wäre, dass dieses Verhalten in der Zeit vor der Einführung von Lotto „6 aus 45“ deutlich verbreiteter war. Der Mangel an Daten bezüglich des Tippverhaltens von Totospiegern einerseits und Buchmacherquoten andererseits (vor 1986) verunmöglicht eine Überprüfung dieser Hypothese.

¹⁴Nur für diese 8 Runden des Sommerbewerbs waren Buchmacherquoten zu bekommen.

merphänomen“ auch durch die urlaubsbedingte verstärkte Verwendung von Scheinen für mehrere, aufeinanderfolgende Runden, welche sonst eher für Lotto typisch ist, erklären lassen. In diesem Fall ist eine Berücksichtigung von Ausgangswahrscheinlichkeiten natürlich gar nicht möglich.

Die im Vergleich zu den “objektiven” Auftrittswahrscheinlichkeiten zu starke Beachtung favorisierter Teams durch die Masse der WetterInnen in den restlichen Runden könnte man als eine Art “folk theorem” des Totos bezeichnen. Dieses Verhalten impliziert, dass der Teilnehmer Reihen tippt, deren erwarteter Gewinn unter dem anderer Reihen liegt. Eine mögliche Interpretation für diese *Anomalie* ist die Ignoranz einer breiten Schicht von SpielerInnen gegenüber der Tatsache, dass die gewinnoptimale Strategie nicht darin besteht, die erwartete Zahl richtig getippter Paarungen zu maximieren (was das Tippen von Favoriten bedingt), sondern darin, Spielresultate vorherzusagen, deren Auftrittswahrscheinlichkeit *im Vergleich zur voraussichtlichen relativen Häufigkeit, mit der dieses Resultat von anderen SpielerInnen vorhergesagt wird*, hoch ist. Dieses beobachtete Verhalten steht in deutlichem Gegensatz zu anderen Ergebnissen der Literatur. Thaler und Ziemba (1988) und Asch et al. (1984) weisen etwa im Rahmen einer Untersuchung über Pferdewetten auf den sogenannten “favorite-longshot-bias” hin. In ihren Resultaten tritt exakt das Gegenteil ein: Außenseiter werden übergewichtet, sodass der langfristige Gewinn des Wettens auf favorisierte Pferde höher ist. Eine mögliche Begründung dafür ist die prinzipielle Unattraktivität von Wetten (im Sinne eines “*playing value*”), welche im Gewinnfalle z.B. nicht einmal das Doppelte des Einsatzes bezahlen. Im Fall von Toto kann der Favoritenspieler aufgrund der hohen Zahl der vorherzusagenden Spiele dagegen immer noch mit einer Vervielfachung seines Einsatzes rechnen. Ein weiterer wichtiger Unterschied besteht in der unterschiedlichen Informationslage über die *Markteinschätzung* der Eintrittswahrscheinlichkeiten. Während bei Pferderennen typischerweise ein elektronischer “Totalisator” ständig aktuelle, sogenannte Eventualquoten liefert, fehlt eine derartige Einrichtung beim Fußballtoto. Dadurch kommt es zu einer deutlichen Verlangsamung von *Lerneffekten*. Ein Totospieler wird eine, im Hinblick auf die Maximierung seines Spielgewinns, falsche Favoritenstrategie möglicherweise erst dann aufgeben, wenn sich etwa das Ereignis eines Zwölfergewinns, jedoch mit einer sehr niedrigen Quote, einstellt.

Im Fall der Torwette haben wir zu Vergleichszwecken ebenfalls die entsprechenden Lorenz-Kurven für einige wenige Runden berechnet. In der folgenden Abbildung wird die Runde vom 8.12.1996 betrachtet:

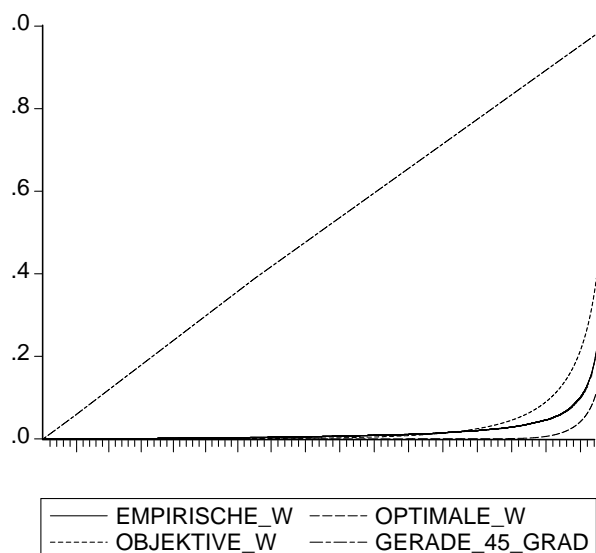


Abbildung 14: Lorenz-Kurven der objektiven, optimalen und empirischen Wahrscheinlichkeiten, Torwetterunde vom 8.12.1996.

Aus Abbildung 14 ersehen wir zweierlei: erstens ist die Torwette ein extrem stark konzentriertes Spiel, was unter anderem dazu führt, dass das Phänomen des rationalen Überwettens von Favori-

tenreihen übermäßig deutlich ausgeprägt ist. Der Zuwachs der Konzentration $\kappa_q - \kappa_p$ beträgt 75,8% der Restfläche! Zweitens liegt die Pseudo-Lorenz-Kurve der empirischen Tippverteilung zwar überhalb jener für die optimale Wahrscheinlichkeitsverteilung, jedoch unterhalb jener für die objektive Strategiewahl. Dies ist – neben den zuvor angeführten Verzerrungen – darauf zurückzuführen, dass die Torwette in ihrer jetzigen Form kaum Spieler anlocken dürfte, die ein Bewußtsein für gewinnmaximierendes Spielen entwickelt haben. Die reale Verteilung wird offenbar von kleinen Einsätzen auf arbiträre Reihen, deren erwarteter Payoff minimal ist, bestimmt.

9 Detailbetrachtungen zur empirischen Strategiewahl – sind systematische Profite erzielbar?

Es gibt prinzipiell zwei Ansätze, welche potentiell geeignet sind, den erwarteten Payoff zu erhöhen.

1. Rundenselektion

Bei dieser Strategie wird solange gewartet, bis der Jackpot hinreichend groß ist, um einen negativen Preis zu gewährleisten. Ein eventueller systematischer Profit des Spielers geht *nicht* zu Lasten des Veranstalters, sondern ausschließlich zu Lasten anderer SpielerInnen. Er wird aus Verlusten der TeilnehmerInnen von Vorrunden, in denen Teile des Pools nicht ausgeschüttet wurden, finanziert.

2. Tippselektion

Hier wird ausgenutzt, daß die Masse der SpielerInnen *nicht* die optimale Strategienkombination (das Nash-Gleichgewicht) wählt. Eine Ungleichgewichtssituation ist dadurch gekennzeichnet, daß manche Tippreihen einen höheren erwarteten Bruttogewinn aufweisen als andere. Übertrifft dieser Bruttogewinn den Einsatz, sind langfristig systematische Profite erzielbar. Wie bereits Ziemba et al. (1986) im Fall von Lotto bemerken, kann die Varianz der *realisierten* Profite bei dieser Methode so groß werden, daß sie nicht praktikabel ist.¹⁵ Die Tippselektions-Methode funktioniert typischerweise zu Lasten von SpielerInnen in *zukünftigen* Runden, da der Spieler Tippreihen zu wetten sucht, die niemand sonst berücksichtigt und die daher ansonsten zu einem Jackpot führen würden.¹⁶

Die Tippselektion-Methode ist öfter anwendbar, erfordert aber erheblich mehr Informationen als die Rundenselektion-Methode. Ein etwaiger Profit resultiert aus einem Informationsvorsprung gegenüber den MitspielerInnen, welcher im Wissen um die Verteilung der abgegebenen Tipps auf die einzelnen Reihen besteht. Die Daten über abgegebene Tipps erlauben uns eine ex-post Untersuchung vergangener Runden, welche der Normalspieler in der Regel nicht für laufende Runden durchführen kann, da die entsprechenden Daten nicht veröffentlicht werden. Wir beginnen daher mit einer kurzen Betrachtung der Rundenselektion-Methode. Erfolg verspricht die Methode nur in der Torwette, wo sich hinreichend oft hohe Jackpots akkumulieren.

9.1 Rundenselektion

Um systematische Profite erzielen zu können, ist es nicht ausreichend, *alle* möglichen Tippreihen in den Runden mit hohem Jackpot zu tippen.¹⁷ Dadurch würden zu viele Reihen mit extrem geringer Auftrittswahrscheinlichkeit erfasst. Wir betrachten daher eine sehr simple Tippregel, die allerdings leicht nachzuvollziehen ist: es werden alle Resultate erfasst, bei denen keine Mannschaft mehr als 3 Tore erzielt (d.h. bis zu einem Resultat von 3:3). Dies erfordert einen Einsatz von $12 \cdot (16^4) = 786.432$ Schilling pro Runde. Die Methode kann auch mit kleineren Einsätzen betrieben werden, wobei dann aus den 16^4 Möglichkeiten eine Zufallsauswahl getroffen wird. Im Falle der Vollkombination ist die

¹⁵Entscheidend ist, was unter "langfristig" zu verstehen ist. Bei einer Ausspielung mit sehr hohem #Z und geringem Kapitaleinsatz kann es sich um Jahrzehnte handeln.

¹⁶Es ist klar, daß beide Methoden nur so lange funktionieren, wie sie von sehr wenigen TeilnehmerInnen verwendet werden.

¹⁷Oder, wenn dieses Anfangskapital nicht zur Verfügung steht, eine Zufallsauswahl zu treffen.

Chance auf einen Treffer im 1. Rang sehr groß; es gelang in 352 der untersuchten 595 Torwette-Runden von 1988–1999. Der Gewinn in einer Runde entspricht im Falle eines Treffers im 1. Rang:

$$G_1 = \frac{b(1-h)s_1(T+16^4) + J_1}{w_1 + 1} + 60 \frac{b(1-h)s_2(T+16^4) + J_2}{w_2 + 60} - 16^4 b \quad (44)$$

Hier geben w_1 bzw. w_2 die Zahl der (anderen) Gewinner im 1. bzw. 2. Rang an. Der Wert von 60 ergibt sich aus der Zahl der Treffer im 2. Rang, falls das System aus 16^4 Tipps einen Treffer im 1. Rang enthält. Mögliche Hat trickgewinne werden *nicht* berücksichtigt. Wenn der Fall eintritt, daß genau in einem Spiel eine oder beide beteiligten Mannschaften mehr als 4 Tore schießen, ergibt sich immer noch ein Gewinn im 2. Rang in der Höhe von:

$$G_2 = 16 \frac{b(1-h)s_2(T+16^4) + J_2}{w_2 + 16} - 16^4 b \quad (45)$$

Es würden sich mit diesem System 16 Treffer im 2. Rang ergeben.¹⁸ Sollte der Fall eintreten, daß in zwei oder mehr Spielen von einer Seite mehr als 3 Tore erzielt werden, ist der Einsatz vollständig verloren. Dies trat in nur 49 von 595 Runden tatsächlich ein.

Wird das System in allen Torwette-Runden angewandt, ergibt sich selbstverständlich ein astronomischer Verlust. Im Sinne der Rundenselektion darf der Anwender nur in Runden mit hoher *potentieller Ausschüttung pro Tipp*, setzen. Die potentielle Ausschüttung pro Tipp ergibt sich durch gleichmässige Verteilung eines Jackpots J auf die teilnehmenden Tipps T , sodass sie $b(1-h) + \frac{J}{T}$ entspricht. Das Resultat eines solchen Verhaltens ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Basis bilden 595 Runden (1988–1999).

Min. Aussch./Tipp	Rundenzahl	Ges.gewinn/-verlust	Gewinn/Runde
12	152	-55,9 Mill.	-367.700
15	88	-24,3 Mill.	-276.000
17	51	-9,1 Mill.	-178.800
19	33	-3,9 Mill.	-118.700
21	17	+2,5 Mill.	+148.300

Tabelle 5: Resultate des Rundenselektion-Systems in der Torwette.

Wir sehen, daß eine potentielle Ausschüttung pro Tipp von mehr als 12 Schilling (=Einsatz) nicht ausreicht, um dauerhafte, systematische Gewinne zu erzielen. Erst wenn *nur* in Runden mit einer Ausschüttung pro Tipp von mehr als 21 Schilling gespielt wird,¹⁹ ergibt sich ein Gewinn. Zwei Einschränkungen sind jedoch wesentlich. Erstens kann sich dieser Gewinn zufällig ergeben haben. Wären in den 17 gespielten Runden häufiger Resultate mit mehr als 3 Toren auf einer Seite aufgetreten, wird aus dem Gewinn rasch ein Verlust. Allerdings ging in diesen 17 Runden ohnehin 4 mal der gesamte Einsatz verloren, und es kam auch vor, daß nur ein Gewinn im 2. Rang erzielt wurde, was einen hohen Verlust nach sich zog. Zweitens ist die Betrachtungsweise insofern statisch, als durch die Aktivitäten des Systemanwenders *selbst* manche Jackpots nicht aufgetreten wären. Daher wäre dieses System in Wirklichkeit *seltener* als 17 mal (in einem Zeitraum von über 11 Jahren!) anwendbar gewesen. Im übrigen könnte sich der Gewinn durch einen Hat tricktreffer noch erhöhen. Allerdings muß ein erwarteter Verlust aus der Beteiligung am Toto in Kauf genommen werden. Durch geschicktes Anwenden von Systemscheinen kann dieser im Vergleich zum Gesamteinsatz jedoch gering gehalten werden.

9.2 Tippselektion

Durch Selektion von grundlos selten gespielten Tipps lassen sich potentiell systematische Gewinne auch dann erzielen, wenn die durchschnittliche Ausschüttung pro Tipp nicht so exorbitant hoch ist

¹⁸Die Formel ist auch für die Runden vor Einführung des 2. Ranges gültig, allerdings nimmt der Ausdruck dann immer den Wert $-16^4 b$ an, da $s_2 = 0$ und $J_2 = 0$.

¹⁹Dies entspricht Runden mit *mindestens* einem Sechsfachjackpot.

wie in Torwetterunden mit einem 6-9-fachen Jackpot. Es versteht sich allerdings von selbst, daß es bei niedriger durchschnittlicher Ausschüttung pro Tipp immer schwerer wird, Reihen zu finden, welche hinreichend selten gespielt werden, um einen Ausgleich des Hausvorteils des Veranstalters zu erreichen. Wir werden hier nun drei Totorunden näher betrachten:

1. Runde 211 vom 19.1.1997: 7 Spiele England, 5 Spiele Italien, ein einfacher Zwölferjackpot.
2. Runde 226 vom 4.5.1997: 5 Spiele Österreich 1. Bundesliga (inklusive Wiener Derby), 2 Spiele Österreich 2. Bundesliga, 5 Spiele Deutschland 1. Bundesliga, kein Jackpot.
3. Runde 262 vom 11.1.1998: 6 Spiele England, 6 Spiele Italien, ein doppelter Zwölferjackpot.

Gemäß dem Modell sollten im Schnitt $q(z) * T$ Tipps auf Reihe z abgegeben werden. Die $q(z)$ nehmen dabei derartige Werte an, daß der Bruttogewinn für alle z gleich ist. Es liegt nun nahe, den *tatsächlichen, ex-ante erwarteten Bruttogewinn* für alle Tippereien zu ermitteln. Alle Tippereien, deren Bruttogewinn überdurchschnittlich hoch ist, werden von der Masse der SpielerInnen nicht in dem Ausmaß getippt, wie dies durch die objektiven Wahrscheinlichkeiten, die Größe des Pools usw. gerechtfertigt wäre. Die anderen Reihen (mit unterdurchschnittlichem Bruttogewinn) werden überwettet, und sind folglich *unattraktiv*. Der ex-ante erwartete Bruttogewinn (EBG) für Reihe z ist durch folgende Formel gegeben:

$$EBG(z) = \frac{b(1-h)s_1T + J_1}{w(z) + 1} + \frac{b(1-h)s_2T}{w(Z_{-1}) + 1} + \frac{b(1-h)s_3T}{w(Z_{-2}) + 1} \quad (46)$$

Hier ist $w(z)$ die Zahl der Tipps, welche auf Reihe z abgegeben wurden. $w(Z_{-1})$ wäre die Zahl der Tipps, welche auf eine Reihe abgegeben wurden, in der genau *ein* Spiel anders getippt ist als in Reihe z . $w(Z_{-2})$ ist entsprechend die Zahl der abgegebenen Tipps, die auf eine Reihe lauten, in der genau *zwei* Spiele anders getippt sind als in Reihe z .

Da die Auswertung der beiden letzten Terme (Elfer- und Zehnerbeitrag) für die resultierende große Zahl von Tippmöglichkeiten erhebliche rechentechnische Schwierigkeiten verursacht, haben wir uns darauf beschränkt, den Zwölferbeitrag zu ermitteln. Wenn also eine bestimmte Reihe einen Zwölferbeitrag von z.B. ATS 7 liefert, ist diese Reihe gewiß ein attraktiver Tipp, da der erwartete Bruttogewinn sich noch um den Elfer- und Zehnerbeitrag erhöht. Da nicht anzunehmen ist, daß sich Elfer- und Zehnerbeitrag gegenläufig zum Zwölferbeitrag verhalten, kann unsere Analyse zeigen, welche Reihen *relativ günstiger* sind als andere. Es ist dagegen nicht möglich, eine exakte Aussage darüber zu treffen, ob eine bestimmte Reihe attraktiv in dem Sinne ist, daß ihr Bruttogewinn über dem Einsatz liegt (es sei denn, bereits der Zwölferbeitrag übertrifft diesen).²⁰

Den besten Überblick über die großen Datenmengen bieten die folgenden Grafiken (Abbildungen 15-16). Auf der x-Achse werden die Tippereien, wie schon bei der Konstruktion der Lorenz-Kurven, aufsteigend in der Reihenfolge ihrer objektiven Auftrittswahrscheinlichkeiten geordnet, aufgetragen. Auf der y-Achse wird der Zwölferbeitrag angegeben. Da es sich um über 530.000 Datenpunkte handelt, hätte sich natürlich ein extrem zersplitterter Kurvenverlauf ergeben. Daher wurden die Reihen in Pakete zu je 1000 gruppiert (mit Ausnahme des letzten Pakets, welches 1441 Reihen umfaßt). Für jedes Paket wurde der durchschnittliche Zwölferbeitrag ermittelt. Dies verhindert wilde Sprünge bei einzelnen, häufig getippten Reihen. Es bleiben aber immer noch 531 Datenpunkte und man könnte vermuten, daß sich immer noch Sprünge ohne ersichtlichen Trend ergeben. Dem ist jedoch nicht so:

Das bemerkenswerteste Merkmal dieser Kurven ist die Gleichförmigkeit ihres Verlaufs in allen untersuchten Runden.

Äußerst bemerkenswert ist weiters der starke *Trend*. Im wesentlichen steigt der Zwölferbeitrag (und damit der erwartete Bruttogewinn) zuerst mit der objektiven Eintrittswahrscheinlichkeit an, erreicht ein Maximum und fällt dann etwa ab dem letzten Zehntel wieder massiv ab. Die unwahrscheinlichen Tippereien erscheinen generell *uninteressant*. Zwar werden die meisten dieser

²⁰Als grobe Faustregel könnte man zum ermittelten Betrag noch die durchschnittlich auf den zweiten und dritten Rang entfallende Ausschüttung pro Tipp $b(1-h)(s_2 + s_3) \approx 1,52$ addieren, um eine Näherung für den erwarteten Bruttogesamtgewinn zu erhalten.

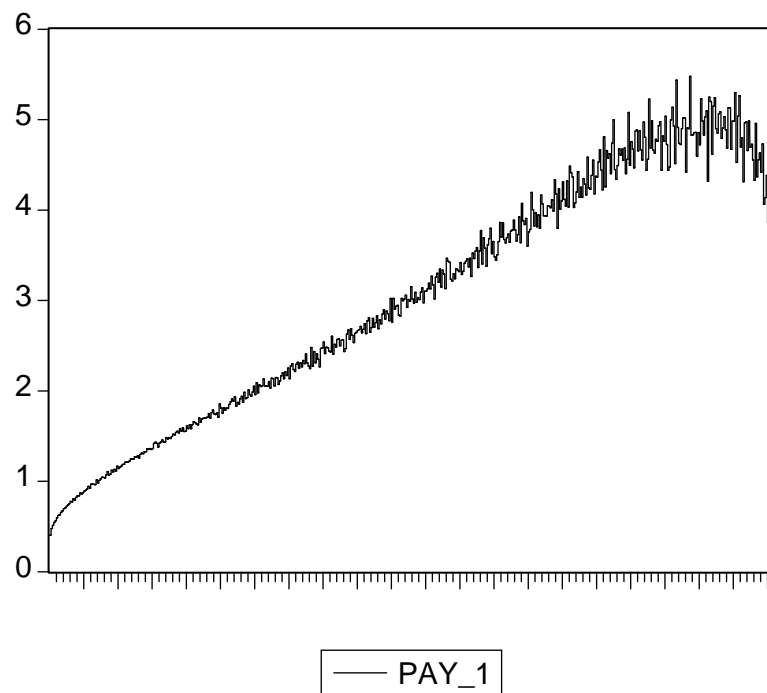


Abbildung 15: Ex-ante erwarteter Zwölferbeitrag in ATS, geordnet nach objektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten. Totorunde vom 11.1.1998.

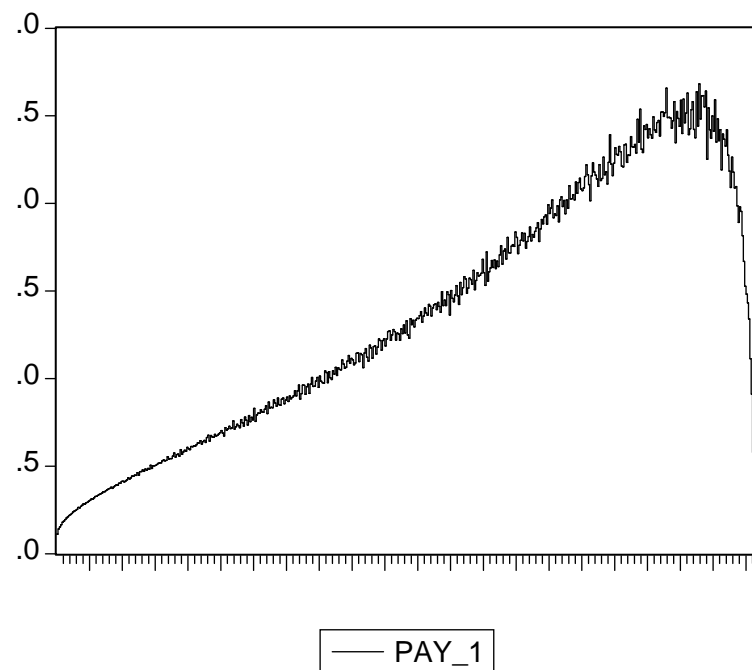


Abbildung 16: Ex-ante erwarteter Zwölferbeitrag in ATS, geordnet nach objektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten. Totorunde vom 4.5.1997.

Reihen von niemand getippt und würden daher zu einem Solozwölfer führen, jedoch sind ihre Eintrittswahrscheinlichkeiten so klein, daß – gegeben den begrenzten Pool – nicht einmal dieser Großgewinn das erhebliche Verlustrisiko aufwiegt. Auf der anderen Seite sind die letzten etwa 10.000 Tippreihen ebenfalls *uninteressant*. Hierbei handelt es sich um mit vergleichsweise sehr hoher Wahrscheinlichkeit auftretende Kombinationen. Allerdings werden diese von derartig vielen TeilnehmerInnen angekreuzt, daß der erwartete Bruttogewinn auf niedrigem Niveau liegt. Hier erkennen wir erneut das Phänomen des Überwettens (noch *über* das vom Modell ohnehin vorhergesagte Niveau hinaus). Am profitabelsten sind Reihen, die eine Auftrittswahrscheinlichkeit von ca. 1:250.000 haben. Zum Vergleich: die durchschnittliche Auftrittswahrscheinlichkeit ist 1:531.441, die Median-Wahrscheinlichkeit ca. 1:800.000 (es liegt eine schiefe Verteilung vor). Die unwahrscheinlichste Reihe liegt typischerweise im Bereich von 1:14.000.000, die wahrscheinlichste um die 1:20.000.

Einige bemerkenswerte Fakten:

In der Runde vom 19.1.1997 war die unwahrscheinlichste Reihe “212XX1X22X21” mit einer Wahrscheinlichkeit von 1:13,870.000 und einem Zwölferbeitrag von ATS 0,212. Die unwahrscheinlichste Reihe, die tatsächlich getippt wurde war “2121X1X22X21”, wobei 5 Tippreihen eine niedrigere Wahrscheinlichkeit aufwiesen. Die wahrscheinlichste Reihe “121212111112” mit $p = (1 : 18000)$ wurde 1535 mal getippt und wies einen Zwölferbeitrag von ATS 0,106 auf. Das Paket mit den 1000 unwahrscheinlichsten Reihen ergab einen durchschnittlichen Zwölferbeitrag von ATS 0,276, wobei insgesamt 202 Tipps auf diese 1000 Reihen abgegeben wurden. Auf die 1441 Reihen mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten wurden 191.864 Tipps abgegeben (fast 1/6 der Gesamtzahl an Tipps in dieser Runde), womit sich ein durchschnittlicher Zwölferbeitrag von ATS 1,161 ergab. Das “attraktivste” Paket wies einen durchschnittlichen Zwölferbeitrag von ATS 4,095 auf, die absolut attraktivste Reihe “22X212X1111X” einen von ATS 31,22. Die am häufigsten getippte Reihe war “111111111111” mit 1646 Tipps und einem Zwölferbeitrag von weniger als 2 Groschen.

In den beiden anderen Runden ergeben sich ähnliche Resultate. Am 4.5.1997 ergab sich für das beste Tipppaket ein durchschnittlicher Zwölferbeitrag von nur ATS 2,682, da es in dieser Runde keinen Jackpot gab. Am 11.1.1998 ergab sich, dank eines Doppeljackpots, dafür ein Wert von ATS 5,479, die attraktivste Tippreihe war ganze ATS 55,45 “wert” (plus Elfer- und Zehnerbeitrag).

Es ist zu beachten, daß sich die sehr hohen Werte für die absolut attraktivste Reihe praktisch nicht nutzen lassen, da die jeweiligen Daten für eine bestimmte Runde nicht bekannt gegeben werden. Da aber das beste *Paket* immer im selben Bereich zu liegen scheint, ist es trotzdem möglich, durch gezieltes Tippen von Reihen mit einer Wahrscheinlichkeit von um die 1:250 000 seinen langfristigen Verlust aus dem Totospiel erheblich zu verkleinern. Ob systematische Gewinne möglich sind, bleibt unklar. Es scheint, als ob es in Runden mit einem Doppeljackpot möglich wäre. Allerdings kann man, z.B. mit einem Einsatz von 7000 Schilling pro Runde auf das vermeintlich attraktivste Paket, erst nach durchschnittlich 250 Teilnahmen einen Zwölfertreffer erwarten, sodaß diese Methode nicht nur Stehvermögen, sondern auch erheblichen Kapitaleinsatz verlangt.

Viel klarer ist jedoch, wie man *nicht* Toto spielen sollte. Der sehr niedrige erwartete Bruttotopayoff einer Tippreihe wie “111111111111” (die im übrigen auch am 4.5.1997 die am häufigsten getippte war) wurde schon erwähnt. Weitere Beispiele folgen in Tabelle 6.

Tippreihe	Tipps/Zw.btr 19.1.97	Tipps/Zw.btr 4.5.97	Tipps/Zw.btr 11.1.98
22222222222	335mal/0,004	343mal/0,003	301mal/0,004
XXXXXXXXXXXXX	543mal/0,002	481mal/0,001	585mal/0,001
12X12X12X12X	235mal/0,009	198mal/0,009	189mal/0,028
1X21X21X21X2	56mal/0,050	43mal/0,024	48mal/0,089
1111222XXXX	29mal/0,112	32mal/0,313	38mal/0,372
12XX2112XX21	179mal/0,009	158mal/0,006	151mal/0,055
Tipp Totovorschau	1625mal/0,059	1738mal/0,025	1799mal/0,043

Tabelle 6: Wenig empfehlenswerte Tippreihen.

Die frappierende Kontinuität im Überwetten derartiger “geometrisch attraktiver” Tippreihen oder von Reihen, die aus anderen Gründen “focal points” sind (wie der Tipp der Totovorschau oder auch der “Kronen Zeitung”) bestätigt die bereits an anderer Stelle vermutete weitverbreitete Ignoranz gegenüber der Funktionsweise eines Totalisatorspieles. Viele der genannten Tippreihen erreichen nicht einmal einen Zwölferbeitrag von einem Groschen. Konkret bedeutet dies, dass, wenn etwa die Tippreihe “XXXXXXXXXXXXX” in der Runde vom 11.1.1998 (immerhin mit Doppeljackpot) tatsächlich aufgetreten wäre – was natürlich ein Ereignis mit extrem geringer Wahrscheinlichkeit ist – die Zwölferquote nicht einmal ATS 6400 betragen hätte. Die Liste ließe sich beliebig fortsetzen.

Bei der Untersuchung von Abweichungen vom gleichgewichtigen Tippverhalten könnte man auch einzelne Spiele betrachten. Wir geben in der folgenden Tabelle die “objektiven”²¹ Ausgangswahrscheinlichkeiten und die relativen Häufigkeiten, mit denen die entsprechenden Resultate getippt werden, wieder. Erstere werden mit $pe(.)$, letztere mit $re(.)$ bezeichnet.

Paarung	pe(1)	pe(X)	pe(2)	re(1)	re(X)	re(2)
Arsenal-Leeds	0,499	0,266	0,235	0,511	0,282	0,207
Liverpool-Wimbledon	0,591	0,249	0,160	0,735	0,173	0,093
Aston Villa-Leicester	0,499	0,266	0,235	0,542	0,252	0,206
Sheffield Wed.-Newcastle	0,361	0,277	0,361	0,433	0,312	0,255
Crystal Palace-Everton	0,433	0,284	0,284	0,478	0,313	0,209
Bolton-Southampton	0,416	0,287	0,297	0,464	0,327	0,209
AC Milan-AS Roma	0,499	0,266	0,235	0,575	0,299	0,126
AC Piacenza-Inter Mailand	0,253	0,270	0,477	0,104	0,272	0,624
Sampdoria-AC Parma	0,350	0,300	0,350	0,298	0,441	0,261
Brescia-Fiorentina	0,336	0,300	0,365	0,253	0,421	0,327
Empoli-Bologna	0,365	0,300	0,336	0,444	0,348	0,208
Bari-Atalanta Bergamo	0,450	0,280	0,270	0,461	0,380	0,159

Tabelle 7: Objektive Wahrscheinlichkeiten und Tipphäufigkeiten für einzelne Spiele, Totorunde vom 11.1.1998.

Die Methode der Tippselektion lässt sich auch bei der Torwette betreiben. Wir haben zwei Runden untersucht: jene vom 8.12.1996 mit einem Einfachjackpot und jene vom 6.12.1998, in der es zu einem Siebenfachjackpot kam. In der folgenden Grafik wird, analog zur Vorgangsweise beim Toto, nur der Beitrag des 1. Ranges (4 Richtige) dargestellt. Die erwarteten Beiträge aus dem 2. Rang und dem Hatrick sind hier noch hinzuzuaddieren. Um die Darstellung möglichst klar werden zu lassen, haben wir die unwahrscheinlichsten 1,620.000 Tippreihen (d.h. mehr als die ersten 95%!) abgeschnitten. Diese Reihen sind so unwahrscheinlich, daß sie vernachlässigt werden können. Die Größe der Pakete, für welche Durchschnitte ermittelt wurden, beträgt hier 50 Reihen, gegenüber 1000 beim Toto.

²¹Es sei nochmals daran erinnert, daß es sich hier de facto um die Meinung von Buchmachern handelt.

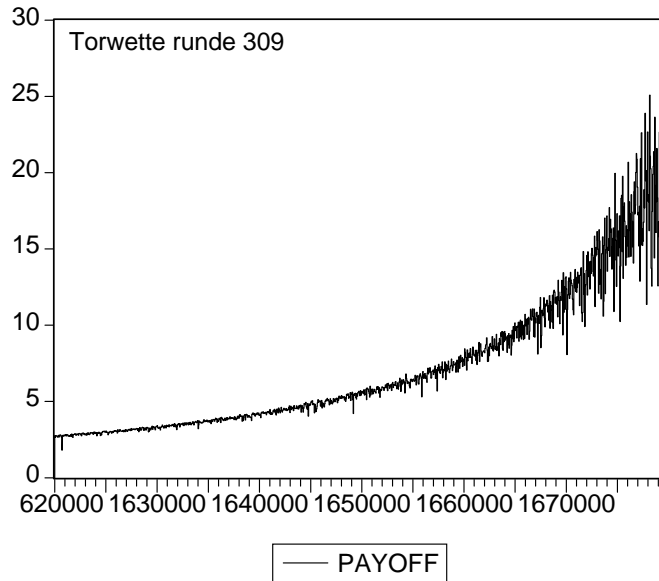


Abbildung 17: Empirischer Payoff für die wahrscheinlichsten Tippreihen, in ATS, Torwetterunde vom 6.12.1998.

Wir sehen, daß beispielsweise in der Runde mit Siebenfachjackpot der Einsatz von ATS 12 bei manchen Paketen klar übertroffen wird. Die Behauptung, in der Torwette seien durch Kombination der Methoden der Runden- und Tippselektion gelegentlich systematische (erwartete) Nettoprofiten möglich, scheint hiermit bestätigt.

10 Schlussfolgerungen und Diskussion

Aufgrund der genauen Tippdaten war es uns erstmals möglich, die optimalen Spielstrategien für 93 Totorunden im symmetrischen Gleichgewicht zu berechnen und diese mit dem tatsächlichen Verhalten der TotospielerInnen zu vergleichen. Da die optimale Spielstrategie aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung über 531.441 Tippmöglichkeiten besteht, stellen wir diese in Anlehnung an eine Lorenzkurve als eine Kurve dar, die die kumulierte Wahrscheinlichkeit der nach ihrer Wahrscheinlichkeit geordneten Tippkombinationen darstellt. Diese Art der Darstellung erlaubt uns die Berechnung von Konzentrationsmaßen. Je höher die Konzentration eines Spiels, desto ungleicher sind die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Tipps verteilt. Die Berechnungen zeigen, dass in jeder der untersuchten Totorunden die optimale Spielstrategie höher konzentriert war als die objektive Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dieses Phänomen des Überwettens von Favoriten bedeutet, dass im symmetrischen Gleichgewicht die wahrscheinlicheren Tippreihen relativ häufiger gespielt werden sollen als die unwahrscheinlicheren. Bei der Torwette tritt dieses Phänomen sogar noch weitaus deutlicher auf, mit Konzentrationsmaßen, die nahe 1 liegen. Im Gegensatz dazu ist die optimale Strategie im symmetrischen Gleichgewicht bei Totalisatorwetten mit *gleichen* Eintrittswahrscheinlichkeiten, wie z.B. Lotto "6 aus 45", jede Tippkombination genau mit jener Wahrscheinlichkeit zu tippen, die ihrer Auftrittswahrscheinlichkeit entspricht.

Die Analyse der tatsächlich gespielten Tipps zeigt, dass in 94% aller untersuchten Toto-Runden die Spieler die Favoriten erwartungsgemäß überwetten. Allerdings werden in 92% der Runden die Favoriten weitaus stärker überwettet als das im symmetrischen Gleichgewicht optimal wäre. Wir stellen daher fest, dass ein wesentlicher Teil der SpielerInnen dazu tendiert, sehr wahrscheinliche Tippreihen zu tippen, obwohl deren erwarteter Payoff niedriger ist als der weniger wahrscheinlicher Tippreihen, da sie im Falle eines Gewinns diesen mit sehr vielen anderen Gewinnern teilen müssen. Evidenz für ähnlich irrationales Spielerverhalten konnte auch für Totalisatorspiele mit gleichen und konstanten Auftrittswahrscheinlichkeiten wie Lotto gefunden werden (vgl. Simon 1998). Allerdings

gibt es im Gegensatz zu unserer Arbeit dafür keine systematische Evidenz über mehrere Runden hinweg. Wir können daraus schließen, dass nicht optimierendes Spielerverhalten weder auf reine Glücksspiele noch auf einzelne Runden beschränkt ist. Dieses Ergebnis wirft die Frage auf, ob es möglich ist, das Faktum, dass das Aggregat der Toto- und TorwettespielerInnen nicht die optimale Gleichgewichtsstrategie spielt, auszunutzen, um systematische Profite zu erzielen. Während das für das Toto eher verneint werden muß, sehen wir, dass Rundenselektion, angewendet in den letzten 14 Jahren auf die Torwette, einen positiven Gewinn gebracht hätte. Auch wenn sich dieses Ergebnis nicht direkt in eine allgemeingültige Strategieregel umlegen lässt, finden wir Evidenz dafür, dass sich durch eine Kombination von Tipp- und Rundenselektion in der Torwette systematische erwartete Nettogewinne erzielen lassen.

Literatur

- [1] Asch P., Malkiel B. und Quandt R. (1984), Market Efficiency in Racetrack Betting, *Journal of Business*, Bd. 57, S.165-175.
- [2] Boss M., Felderer B., Hauser U., Helmenstein C. und U. König (1998), Das österreichische Glücksspielmonopol, IHS, Projektbericht, Wien.
- [3] Hauser U. und König U. (1999), Parimutuel Lotteries: Gamblers' Behavior and the Demand for Tickets, Working Paper No. 9905, Department of Economics, Universität Wien.
- [4] Hauser U., König U. und Krylova E. (2000), Strategisches Spielverhalten bei Totalisatorspielen mit nicht-gleichwahrscheinlichen Spielausgängen wie Toto und Torwette, IHS, Projektbericht, Wien.
- [5] Gabriel P. und Marsden J. (1990), An Examination of Market Efficiency in British Racetrack Betting, *Journal of Political Economy*, Bd. 98, Nr. 4, S. 874-886.
- [6] Myerson R. (1991), Game Theory, Analysis of Conflict, Cambridge, Mass.
- [7] Österreichische Lotterien, Jahresbericht, laufende Jahrgänge, Wien.
- [8] Österreichische Lotterien, Toto Jahrbuch, laufende Jahrgänge, Wien.
- [9] Piesch W. (1975), Statistische Konzentrationsmaße, Tübingen.
- [10] Simon J. (1998), An Analysis of the Distribution of Combinations Chosen by UK National Lottery Players, *Journal of Risk and Uncertainty*, Bd.17 Nr.3, S. 243-276.
- [11] Thaler R. und Ziemba W. (1988), Parimutuel Betting Markets: Racetracks and Lotteries, *Journal of Economic Perspectives*, Bd.2, Nr.2, S. 161-174.
- [12] Ziemba W., Brumelle S., Gautier A. und Schwartz S. (1988), Dr. Z's 6/45 Lotto Guidebook, Vancouver, Dr. Z Investments.

Authors: Ursula Hauser, Ulrich König, Elizaveta Krylova

Title: Gambler's Rationality in Parimutuel Soccer Betting: Strategisches Spielverhalten bei
Totalisatorspielen mit nicht-gleichwahrscheinlichen Spielausgängen wie Toto und Torwette

Reihe Ökonomie / Economics Series 87

Editor: Robert M. Kunst (Econometrics)

Associate Editors: Walter Fisher (Macroeconomics), Klaus Ritzberger (Microeconomics)

ISSN: 1605-7996

© 2000 by the Department of Economics, Institute for Advanced Studies (IHS),
Stumpergasse 56, A-1060 Vienna • ☎ +43 1 59991-0 • Fax +43 1 5970635 • <http://www.ihs.ac.at>
